



# Jauge conforme des espaces métriques compacts

Matias Carrasco Piaggio

## ► To cite this version:

Matias Carrasco Piaggio. Jauge conforme des espaces métriques compacts. Géométrie métrique [math.MG]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2011. Français. NNT : . tel-00645284

**HAL Id: tel-00645284**

**<https://theses.hal.science/tel-00645284>**

Submitted on 27 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
délivré par l'Université de Provence  
*Spécialité : Mathématiques*

par

**Matías Carrasco Piaggio**

sous la direction de Peter HAISSINSKY

*Titre :*

---

**Jauge conforme des espaces métriques compacts**

---

soutenue publiquement le 25 octobre 2011

JURY

Marc BOURDON	Université de Lille	Rapporteur
Peter HAÏSSINSKY	Université de Provence	Directeur
Bruce KLEINER	New York University	Rapporteur
Jérôme LOS	Université de Provence	Examineur
Hervé PAJOT	Université de Grenoble	Examineur
Pierre PANSU	Université Paris-Sud	Examineur
Álvaro ROVELLA	Universidad de la República	Examineur



## Remerciements

Je souhaite en premier lieu remercier mon directeur de thèse, Peter Haïssinsky. Il a su me guider et m'encourager durant ces années dans un sujet passionnant, tout en me laissant une grande liberté. Travailler avec lui a été un grand plaisir. Merci d'avoir consacré beaucoup d'énergie à ce travail!

Mes remerciements vont également à Marc Bourdon et Bruce Kleiner qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. J'ai eu des conversations fructueuses avec eux et leurs remarques ont toujours été pertinentes. Je me suis par ailleurs beaucoup inspiré de leur travail. Merci d'avoir consacré une partie de votre temps à cette thèse.

Je voudrais aussi remercier Jérôme Los, Hervé Pajot, Pierre Pansu et Álvaro Rovella qui ont accepté d'être membres de mon jury. Merci Jérôme pour toutes les conversations mathématiques et pour l'intérêt que tu as porté à mon travail au cours de ma thèse. Gracias Leva por cruzar el Atlántico para estar en el tribunal de mi tesis! Me dá mucha alegría.

Je voudrais également remercier Hamish Short pour toute son aide durant ces années.

Merci Séb pour toute ton amitié, ton soutien et tes encouragements durant ces années! Merci aussi à mes grands amis et co-bureaux Clem et Isma! Gracias Sambita, como dice el dicho : el Tango te espera... ojalá que algún día laburemos juntos!

Gracias Má y Pá por todo su apoyo!

Un millón de gracias a vos mi amor por todo el apoyo y la fuerza que me diste durante todo este período, sin los cuales nada de esto hubiera sido posible!



## Table des matières

Chapitre 1. Introduction	7
1. Dimension conforme d'un espace métrique	7
2. Organisation de la thèse et présentation des résultats	15
Notations générales	17
Chapitre 2. Ensembles quasi-autosimilaires	19
1. Définition et premières propriétés métriques	19
2. Sur la connexité locale	24
3. Ensembles quasi-autosimilaires sans point de coupure locale	26
4. Deux exemples : les cercles et les ensembles de Cantor QAS	29
Chapitre 3. Jauge conforme des espaces métriques compacts	33
1. Structure hyperbolique des points de vue d'un espace compact	33
2. Caractérisation de la jauge conforme	40
3. Contrôle de la dimension et simplification des hypothèses	51
Chapitre 4. Dimension conforme Ahlfors régulière et module combinatoire	67
1. L'exposant critique du module combinatoire	68
2. Comparaison avec les espaces tangents	73
3. Différentes définitions de module combinatoire	79
Chapitre 5. Points de coupure locale et dimension conforme	89
1. Points de coupure locale bien répartis	89
2. Un critère général de dimension 1	93
3. Des exemples	96
Chapitre 6. Applications aux bords des groupes hyperboliques	99
1. Motivations	99
2. Énoncés des théorèmes	101
3. Groupes hyperboliques et dynamique à l'infini	103
4. Scindements quasiconvexes et topologie du bord	105
5. Démonstration du Théorème 6.2	112

6. Démonstration du Théorème 6.5	121
7. Quelques exemples	128
Chapitre 7. Applications à la dynamique des revêtements ramifiés	133
1. Dynamique topologiquement dilatante grossièrement conforme	133
2. La propriété UBR pour les revêtements ramifiés	136
Chapitre 8. Bilan et perspectives	147
1. Sur la jauge conforme Ahlfors régulière	147
2. Dimension conforme égale à un	150
3. Sur la notion d'autosimilarité	153
Bibliographie	155

## CHAPITRE 1

### Introduction

#### 1. Dimension conforme d'un espace métrique

**1.1. Espaces Ahlfors réguliers.** L'objet principal de cette thèse est l'étude de la *dimension conforme Ahlfors régulière* d'un espace métrique compact. On commence par établir notre cadre général.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. On dit que  $X$  est un espace *doublant* s'il existe une constante  $C_D \geq 1$  telle que toute boule de rayon  $r > 0$  peut être recouverte par au plus  $C_D$  boules de rayon  $\frac{r}{2}$ . On dit que  $X$  est *uniformément parfait* s'il existe une constante  $C_P > 1$  telle que pour toute boule  $B(x, r)$  de  $X$  avec  $0 < r \leq \text{diam}X$  on a  $B(x, r) \setminus B(x, C_P^{-1}r) \neq \emptyset$ .

Pour une exposition détaillée des notions qui suivent, voir [Hei01]. Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$ , on dit que  $(X, d, \mu)$  est un espace *Ahlfors régulier de dimension  $\alpha$*  s'il existe une constante  $C_R \geq 1$  telle que pour toute boule  $B(x, r)$  de  $X$  avec  $r \leq \text{diam}X$  on a

$$\frac{1}{C_R} r^\alpha \leq \mu(B(x, r)) \leq C_R r^\alpha. \quad (1.1.1)$$

Dans ce cas, la mesure de Hausdorff  $\alpha$ -dimensionnelle est comparable à  $\mu$  et la dimension de Hausdorff de  $X$ , qu'on note  $\dim_H X$ , est égale à  $\alpha$ . Donc on peut dire aussi que  $d$  est une métrique Ahlfors régulière (AR) de dimension  $\alpha$ . Quand  $(X, d)$  est AR, il est aussi doublant et uniformément parfait, dont les constantes respectives dépendent seulement de la constante  $C_R$  et de la dimension  $\alpha$ . On se réfère à [Fal03] pour une introduction aux différentes notions de dimensions métriques et en particulier à la dimension de Hausdorff.

**1.2. Homéomorphismes quasisymétriques et distorsion bornée.** On rappelle qu'un difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés riemanniennes est dit *conforme* s'il existe une fonction  $\lambda : M \rightarrow (0, \infty)$  telle que pour tout point  $p \in M$  et toute paire de vecteurs tangents  $u, v \in T_p M$  on a  $\langle D_p f(u), D_p f(v) \rangle_{f(p)} = \lambda(p)^2 \langle u, v \rangle_p$ ; i.e. les angles entre vecteurs tangents sont préservés.



Une autre manière de formuler cette condition est la suivante : si  $p \in M$ , on définit la *dilatation* de  $f$  en  $p$  par

$$H_f(p) := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sup \{d(f(z), f(p)) : z \in B(p, \epsilon)\}}{\inf \{d(f(z), f(p)) : z \notin B(p, \epsilon)\}}.$$

Alors  $f$  est conforme si  $H_f(p) = 1$  pour tout  $p \in M$ ; i.e. l'application tangente envoie sphères sur sphères. La définition de  $H_f(p)$  dépend seulement des distances de  $M$  et  $N$ . En particulier, un homéomorphisme  $f : X_1 \rightarrow X_2$  entre deux espaces métriques est dit *quasiconforme* s'il existe une constante  $K \geq 1$  telle que  $H_f(p) \leq K$  pour tout  $p \in X_1$ .

Dans le cas où  $X_1 = X_2 = \mathbb{S}^n$ , la sphère unité de dimension  $n \geq 2$  avec la distance euclidienne, et plus généralement les espaces loewnesques (voir [Hei01] Définition 8.1), les homéomorphismes quasiconformes vérifient des conditions globales de distorsion bornée. En particulier, ils sont quasisymétriques et c'est cette classe d'applications qui fournit un substitut des applications quasiconformes pour les espaces métriques en général. Leur définition précise, dans le contexte des espaces métriques, a été donnée par Tukia et Väisälä dans [TV].

Un homéomorphisme  $h : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  entre deux espaces métriques quelconques est dit *quasisymétrique*, s'il existe un homéomorphisme croissant  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  (qu'on appelle fonction de distorsion) tel que :

$$\frac{d_2(h(x), h(z))}{d_2(h(y), h(z))} \leq \eta \left( \frac{d_1(x, z)}{d_1(y, z)} \right),$$

pour tous  $x, y, z \in X_1$  avec  $y \neq z$ . Comme exemple de propriété de distorsion bornée globale on a la suivante : si  $A \subset B \subset X_1$  et  $\text{diam}_1 B < +\infty$ , alors (voir [Hei01] Proposition 10.8)  $\text{diam}_2 f(B) < +\infty$  et

$$\frac{1}{2}\eta \left( \frac{\text{diam}_1 B}{\text{diam}_1 A} \right)^{-1} \leq \frac{\text{diam}_2 h(A)}{\text{diam}_2 h(B)} \leq \eta \left( \frac{2\text{diam}_1 A}{\text{diam}_1 B} \right). \quad (1.1.2)$$

En d'autres termes, un homéomorphisme quasisymétrique distord les distances (et les diamètres) relatives entre les points de façon uniformément bornée. Par exemple, les homéomorphismes bi-Lipschitz distordent de façon uniformément bornée les distances absolues entre les points, ils sont donc quasisymétriques.

**1.3. La jauge conforme Ahlfors régulière.** Deux métriques  $d_1$  et  $d_2$  sur  $X$  sont dites quasisymétriques si l'application identité  $id : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  est quasisymétrique. On définit la *jauge conforme Ahlfors régulière* d'une métrique  $d$  sur  $X$  par

$$\mathcal{J}_{AR}(X, d) := \{d' \text{ métrique sur } X : d' \text{ est (AR) et quasisymétrique à } d\}.$$

Par exemple,  $d^\epsilon$  est aussi une distance pour tout  $\epsilon \in (0, 1)$ , et l'identité  $id : (X, d) \rightarrow (X, d^\epsilon)$  est  $\eta$ -quasisymétrique avec  $\eta(t) = t^\epsilon$ . En particulier,

$$\dim_H(X, d^\epsilon) = \epsilon^{-1} \dim_H(X, d).$$

Donc, les applications quasisymétriques peuvent changer la dimension de Hausdorff de l'espace et on peut toujours trouver des distances dans la jauge de  $X$  de dimension arbitrairement grande.

La dimension conforme d'un espace métrique est un invariant numérique par quasisymétrie, introduit par P. Pansu [Pan89], permettant la classification à quasi-isométrie près, des espaces homogènes de courbure négative. Elle joue actuellement un rôle important en théorie géométrique des groupes et en dynamique conforme. Il existe différentes versions de la dimension conforme, dans cette thèse on s'intéresse à la dimension conforme Ahlfors-régulière (AR), introduite par M. Bourdon et H. Pajot [BP03].

La *dimension conforme Ahlfors régulière* de  $\mathcal{J}_{AR}(X, d)$  est

$$\dim_{AR}(X, d) := \inf \{\dim_H(X, d') : d' \in \mathcal{J}_{AR}(X, d)\}. \quad (1.1.3)$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la métrique  $d$  on note simplement  $\dim_{AR} X$ . Si l'infimum est pris sur toutes les distances quasisymétriques à  $d$ , on obtient la dimension conforme (de Hausdorff) de  $X$ .

On remarque que l'on a toujours l'estimation  $\dim_T X \leq \dim_{AR} X$ , où  $\dim_T X$  désigne la dimension topologique de  $X$ . A part cette estimation, la dimension conforme AR est en général difficile à évaluer. Elle a été cependant calculé par P. Pansu pour les bords des espaces homogènes de courbure strictement négative [Pan89]. Une exposition de la théorie de la dimension conforme et de ses variantes, ainsi que de ses applications, peut se trouver dans [LP04], [B06], [Kle06], [Haïss08] et [MT10].

**1.4. Des motivations géométriques.** Les applications quasisymétriques apparaissent de façon naturelle dans plusieurs contextes. Notamment dans la théorie des espaces hyperboliques au sens de Gromov, en particulier la théorie des groupes

hyperboliques, et la théorie des revêtements ramifiés de la sphère  $S^2$ , en particulier la dynamique des fractions rationnelles de la sphère de Riemann.

Pour un groupe hyperbolique  $G$  on peut définir son bord à l'infini  $\partial G$  (voir [CDP90] et [GH90]), et une famille canonique de métriques, les métriques visuelles, Ahlfors-régulières (voir [Coo93]) et quasisymétriquement équivalentes entre elles. Ceci permet d'associer à un groupe hyperbolique une jauge conforme AR canonique. Le groupe  $G$  agit comme un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius sur  $\partial G$ . Ceci restreint les possibilités des métriques de la jauge du bord, par exemple le bord est quasi-autosimilaire (voir le Chapitre 2).

Les quasi-isométries entre deux groupes hyperboliques se prolongent en homéomorphismes quasisymétriques entre leurs bords, et réciproquement (voir [Pau96]), de manière analogue que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  définit les difféomorphismes conformes de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , ainsi que les isométries de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Donc tout invariant par quasisymétrie du bord d'un groupe hyperbolique est un invariant par quasi-isométrie du groupe.

Ceci montre un fort lien entre les propriétés géométriques d'un espace hyperbolique et les propriétés analytiques de son bord. Un des antécédents importants de cette relation est le théorème de rigidité de Mostow [Mos73], en relation à la détermination des variétés compactes localement symétriques de rang 1 par leur groupe fondamental. Les bonnes propriétés analytiques des applications quasiconformes dans les espaces loewnesques ont fortement motivé la recherche des distances loewnesques dans la jauge conforme d'un espace métrique.

Pour les groupes hyperboliques, un problème central est la caractérisation des réseaux cocompacts de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  via leurs bords. Plus précisément :

CONJECTURE DE CANNON : Si  $G$  est un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à la sphère  $S^2$ , alors le bord  $\partial G$  est quasisymétriquement homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$  et  $G$  agit isométriquement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathbb{H}^3$ .

Une réponse partielle à cette question est donnée par le théorème suivant de M. Bonk et B. Kleiner, où la dimension conforme AR joue un rôle très important.

THÉORÈME 1.1 (voir [BonK05]). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à  $S^2$ . Si sa jauge canonique atteint sa dimension conforme Ahlfors régulière, alors  $G$  vérifie la conjecture de Cannon.*

Cela motive la question suivante : sous quelles conditions la jauge canonique d'un groupe hyperbolique, et plus généralement d'un espace métrique, atteint-elle sa dimension conforme AR ? Par exemple, ceci est le cas si  $X$  est un espace loewnesque.

Bien que cette question est loin d'être répondue, il existe quelques conjectures (voir [Kle06]). Pour montrer sa difficulté, on remarque qu'il n'est pas encore connu si la réponse est affirmative pour le tapis de Sierpiński  $S$ , un espace qui présente une classe très riche de jauges conformes différentes. On rappelle que  $S$  est construit de la façon suivante : on divise le carré unité en neuf carrés identiques et on enlève le carré du milieu ; on continue par récurrence dans tous les carrés qui restent et on prend l'intersection. La valeur de sa dimension conforme est encore inconnue, même quand on munit  $S$  de la distance euclidienne (voir [B06] pour plus de détails). On remarque qu'il existe des groupes hyperboliques de bord homéomorphes à  $S$ , ainsi que des ensembles de Julia de fractions rationnelles.

**1.5. Des motivations dynamiques.** Soit  $\text{Rat}_d(\hat{\mathbb{C}})$  l'espace des fractions rationnelles de la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ . L'analyse quasiconforme a de fortes applications à la dynamique des  $f \in \text{Rat}_d(\hat{\mathbb{C}})$ . Un des antécédents les plus importants est donné par le théorème de D. Sullivan sur la non existence de composantes errantes de l'ensemble de Fatou.

Le sous-ensemble  $\text{Hyp}_d(\hat{\mathbb{C}})$  des fractions rationnelles  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  hyperboliques, c'est-à-dire expansives dans un voisinage de son ensemble de Julia  $J(f)$ , est un ouvert conjecturellement dense de  $\text{Rat}_d(\hat{\mathbb{C}})$ . Les bonnes propriétés dynamiques des fractions rationnelles hyperboliques impliquent par exemple que son ensemble de Julia, avec la distance sphérique, est Ahlfors régulier. En effet, la mesure de Hausdorff de dimension  $\alpha = \dim_H J(f)$  est comparable à la mesure conforme d'exposant  $\alpha$  (voir [Ur03]). Aussi  $J(f)$  est quasi-autosimilaire (voir le Chapitre 2).

Si  $f, g \in \text{Hyp}_d(\hat{\mathbb{C}})$  sont topologiquement conjuguées dans un voisinage de leurs ensembles de Julia, alors d'après un théorème de D. Sullivan, elles sont quasiconformément conjuguées. En particulier, la dimension conforme AR de  $J(f)$  est un invariant de la classe de conjugaison topologique de  $f$ .

Les ensembles de Julia produisent de nombreux exemples de compacts quasi-autosimilaires ayant une géométrie quasiconforme très riche. Par exemple, il existe une infinité d'ensembles de Julia homéomorphes au tapis de Sierpiński qui sont non quasisymétriquement équivalents (voir [HP10]). Le dictionnaire de Sullivan entre la dynamique des fractions rationnelles et les groupes kleinéens motive aussi l'étude de la dimension conforme AR de ces ensembles.

Les travaux de P. Haïssinsky et K. Pilgrim (voir [HP09] et [HP08]) ont établi le cadre adéquat pour étudier la jauge conforme du répulseur d'un revêtement ramifié qui vérifie certaines conditions d'expansion (topologiquement CXC voir Définition 7.2), et ont notamment donné le correspondant dynamique des groupes de convergence uniforme dans le dictionnaire.

A un tel système dynamique  $f$ , on peut associer une famille canonique de métriques Ahlfors régulières sur son répulseur quasisymétriquement équivalentes entre elles (et donc une jauge canonique  $\mathcal{J}(f)$ ) qui rendent  $f$  grossièrement conforme. Toute conjugaison topologique entre deux telles applications est quasisymétrique, et donc tout invariant par quasisymétrie est un invariant de conjugaison topologique. De plus, cet invariant caractérise essentiellement les fractions rationnelles parmi les applications topologiquement CXC de la sphère  $S^2$  :

**THÉORÈME 1.2** (voir Théorème 1.4 de [HP08]). *Un revêtement ramifié top. CXC  $f : S^2 \rightarrow S^2$  est topologiquement conjugué à une fraction rationnelle semi-hyperbolique si et seulement si la dimension conforme AR de  $\mathcal{J}(f)$  est atteinte est égale à 2.*

Ce théorème représente l'analogue du théorème de Bonk et Kleiner pour les groupes hyperboliques. Il faut signaler que, dans le cas des revêtements ramifiés, il est nécessaire de demander que la dimension conforme soit égale à 2. Voir [HP11] Théorème 1.1 pour une caractérisation complète de quand la dimension conforme AR de  $\mathcal{J}(f)$  est atteinte mais pas forcément égale à 2.

**1.6. Discrétisation et jauge conforme.** La discrétisation a été une des approches importantes pour étudier la jauge conforme d'un espace métrique. Par une discrétisation, on veut dire une suite de recouvrements  $\{\mathcal{U}_i\}_i$  de  $X$  dont la maille tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini. La première remarque est que quand la combinatoire de cette suite de recouvrements est uniformément bornée, on peut lui associer un espace hyperbolique  $Z$ , le nerf des  $\{\mathcal{U}_i\}_i$ , dont le bord est quasisymétriquement équivalent à  $X$ . En particulier, la jauge conforme de  $X$  coïncide avec la jauge conforme canonique du bord de  $Z$ . Ceci permet l'utilisation de techniques de la géométrie hyperbolique pour étudier la jauge conforme de  $X$ .

Deuxièmement, une discrétisation permet l'introduction d'un autre ingrédient *a priori* éloigné des considérations sur la jauge conforme. En effet, M. Bonk et B. Kleiner montrent (voir Théorème 1.3 de [BonK05]) que si  $d$  est une distance minimisante pour la dimension conforme AR de la jauge canonique du bord d'un groupe  $G$ , alors  $d$  vérifie des propriétés particulières, à savoir  $(\partial G, d)$  est un espace

loewnesque (dès que la dimension  $q := \dim_{AR} \partial G > 1$ ). Dans le cas où  $\partial G$  est homéomorphe à la sphère  $S^2$ , la condition de Loewner implique que  $q = 2$  et  $\partial G$  est quasisymétrique à  $\mathbb{S}^2$  (voir le Théorème 1.2 de [BonK02b]). Ce dernier résultat est conséquence d'une caractérisation de la jauge conforme de la sphère  $\mathbb{S}^2$  donnée à partir du *module combinatoire* associé à une discrétisation de  $\partial G$ . Un autre exemple fortement lié à ce dernier (voir [Haïss09]) est donné par le théorème de Riemann combinatoire (voir [Can94]).

On rappelle que le  $p$ -module analytique ( $p > 1$ ) d'une famille de courbes  $\Gamma$  d'un espace métrique Ahlfors régulier est défini par

$$\text{Mod}_p(\Gamma) = \inf \int_X \rho^p \, d\mu,$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions boréliennes  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui sont  $\Gamma$ -admissibles, i.e. telles que pour toute courbe rectifiable  $\gamma \in \Gamma$  on a

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho \, ds \geq 1.$$

Ceci est une généralisation aux espaces métriques du *module conforme* de l'analyse complexe (voir le Chapitre 4). L'existence de familles des courbes de module strictement positif est fortement liée à la dimension conforme AR. Par exemple, J. Tyson montre que [Tys98] si  $Z$  est  $Q$ -régulier,  $Q > 1$ , et admet une famille de courbes de  $Q$ -module strictement positif, alors  $Z$  atteint aussi sa dimension conforme AR. Certainement plus surprenant, S. Keith et T. Laakso [KL04] montrent que cette condition est presque nécessaire au sens suivant. Pour une définition de l'espace tangent d'un espace métrique, voir le Chapitre 4.

**THÉORÈME 1.3** (S. Keith et T. Laakso). *Si  $Z$  est  $Q$ -régulier,  $Q > 1$ , et si  $\dim_{AR}(Z) = \dim_H Z$ , alors il existe un espace tangent de  $Z$  qui admet une famille de courbes de  $Q$ -module strictement positif.*

Le module combinatoire est une version discrète du module analytique, mais qui, contrairement à ce dernier, est indépendant de toute structure analytique. Il est défini en utilisant des recouvrements de  $X$  (voir le Chapitre 4) et donc dépend seulement de la combinatoire d'un tel recouvrement.

Pour avoir un contrôle sur la combinatoire d'un recouvrement de  $X$ , il faut lui imposer des conditions supplémentaires ; la plus naturelle pour étudier les invariants par quasisymétrie est celle de «quasi-empilement» (voir [Haïss09]). Pour des raisons techniques, on utilisera des recouvrement particuliers. Soit  $\{X_i\}$  une suite croissante d'ensembles  $10^{-i}$ -séparés maximaux, et soit  $\mathcal{U}_k$  le recouvrement par les

boules  $B(x, 10^{-i})$  associées aux éléments  $x \in X_i$ . Etant donné  $p > 1$ , on lui associe une suite  $\{M_{p,k}\}$ , où  $M_{p,k}$  est le  $p$ -module combinatoire de  $X$  à l'échelle  $k$  :

$$M_{p,k} = \sup_{i \geq 1} \max_{x \in X_i} \text{Mod}_p(\Gamma_{i,k}(x), G_{i+k}),$$

où  $\Gamma_{i,k}(x)$  est la famille des «courbes» dans le nerf  $G_{i+k}$  associé à  $\mathcal{U}_{i+k}$  qui «joint» la boule  $B(x, 10^{-i})$  avec le complémentaire de la boule  $B(x, L \cdot 10^{-i})$  (voir le Chapitre 4 pour les définitions précises). En d'autres termes, le module  $M_{p,k}$  tient compte de tous les «anneaux» de  $X$  qui ont un rapport de rayon fixé  $L$ . Par exemple dans le cas où  $X = \mathbb{C}$  et  $p = 2$ , le module  $M_{2,k} \asymp 2\pi(\log(L))^{-1}$ , c'est-à-dire qu'il est équivalent au module conforme des couronnes de rapport  $L$ .

Dans cette thèse on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite  $\{M_{p,k}\}$  et à sa dépendance en  $p$ . Notamment on s'intéresse à *l'exposant critique*

$$Q := \inf\{p > 1 : \liminf_k M_{p,k} = 0\},$$

et à sa relation avec la dimension conforme AR.

**1.7. Dimension conforme et dimension topologique.** D'un certain point de vue, la dimension conforme mesure le représentant le plus simple de la jauge conforme d'un espace métrique. On remarque que la dimension topologique admet une interprétation analogue : si  $(X, d)$  est un espace métrique, alors

$$\dim_T X = \inf\{\dim_H(X, d') : d' \in \mathcal{J}_T(X, d)\},$$

où  $\mathcal{J}_T(X, d)$  est la collection des distances  $d'$  sur  $X$  telles que  $id : (X, d) \rightarrow (X, d')$  est un homéomorphisme. Une question importante est de savoir sous quelles conditions a-t-on  $\dim_{AR} X = \dim_T X$  ? Notamment les cas  $\dim_T X = 0, 1$  et  $2$ .

La question est assez bien comprise quand la dimension topologique est zéro. Par exemple, un théorème de Kovalev affirme que la dimension conforme de Hausdorff de  $X$  est zéro dès qu'elle est strictement plus petite qu'un. Aussi (voir Chapitre 2) dans le cas quasi-autosimilaire la dimension conforme AR est zéro dès que  $\dim_T X = 0$ . Voir le Chapitre 5 pour un exemple d'ensemble de Cantor pour lequel la dimension conforme AR est 2.

Le cas de dimension topologique un est moins clair. Un critère de P. Pansu ([Pan89], voir aussi [Bou95] Lemme 1.6) donne des bornes inférieures en termes d'existence de familles «suffisamment riches» de courbes dans l'espace. Ceci permet de donner un critère de dimension strictement plus grande qu'un quand l'espace n'a pas de point de coupure locale quantitativement (voir [Mac10] ainsi que le Chapitre 2). Par exemple le tapis de Sierpiński vérifie cette condition.

Quelques exemples sont connus où  $\dim_{AR} X = 1$ . Un des premiers exemples non triviaux à été donné par Pansu, voir l'exemple 6.7.2 du Chapitre 6. D'autres sont donnés par certains IFS : le «antenna set» dans [BT01], le «triangle de Sierpiński» due à Laakso et ses généralisations dans [TW06].

## 2. Organisation de la thèse et présentation des résultats

Cette thèse est essentiellement divisée en deux parties. La première, qui consiste des Chapitres 2, 3, 4 et 5, est de nature plus abstraite et dans laquelle on étudie la jauge et la dimension conforme AR d'un espace métrique compact, doublant et uniformément parfait. Dans la deuxième partie, qui consiste des Chapitres 6 et 7, on donne des applications des résultats généraux montrés dans la première partie aux bords des groupes hyperboliques et aux répulseurs des revêtements ramifiés CXC.

**2.1. Ensembles quasi-autosimilaires.** Les exemples mentionnés ci-dessus, les bords des groupes hyperboliques et les ensembles de Julia des fractions rationnelles hyperboliques, partagent la propriété d'être quasi-autosimilaires. Dans le Chapitre 2, on rassemble quelques propriétés des ensembles quasi-autosimilaires, notamment on montre le Corollaire 2.4 qui certifie que  $\mathcal{J}_{AR}(X, d) \neq \emptyset$ . Dans la Section 3 Corollaire 2.13 de ce chapitre, on montre en utilisant un critère dû à J. Mackay [Mac10], qu'un espace métrique quasi-autosimilaire, localement connexe et sans point de coupure locale a dimension conforme strictement plus grande que 1. On finit par donner dans la Section 4 de ce chapitre quelques résultats connus sur la dimension conforme des espaces quasi-autosimilaires.

**2.2. Description de la jauge conforme.** Le but du Chapitre 3 est de montrer comment à partir d'une suite de discrétisations d'un espace métrique compact, on peut construire des distances dans la jauge conforme (Ahlfors régulière) de dimension contrôlée. Dans la section 1, on reproduit une construction de Bourdon et Pajot [BP03] qui nous permet de voir la jauge conforme d'un espace métrique compact  $(X, d)$  comme la jauge canonique du bord d'un espace hyperbolique. Dans la section 2, on utilise cette construction pour caractériser, dans le Théorème 3.3, la jauge conforme (Ahlfors régulière) de  $(X, d)$ . Finalement, dans les sections 3.1 et 3.2, on donne des conditions suffisantes qui nous permettront de construire des distances dans la jauge de dimension donnée (Théorème 3.10), et d'adapter les hypothèses du Théorème 3.3 pour travailler avec le module combinatoire (Proposition 3.14).

**2.3. Module combinatoire et dimension conforme.** Le but du Chapitre 4 est de montrer comment calculer la dimension conforme AR d'un compact à l'aide



du module combinatoire. Dans la Section 1, on définit l'exposant critique  $Q_N$  du module combinatoire et on montre dans le Théorème 4.5 que  $Q_N$  est égal à la  $\dim_{AR} X$ . Associé aux faits que le module combinatoire est positif à l'exposant critique et est majoré par le module des espaces tangents de  $X$ , on peut donner, dans la Section 2, une démonstration plus conceptuelle du théorème de Keith et Laakso (Corollaire 4.12). Dans la Section 3, on traite différentes définitions du module combinatoire. Dans le Théorème 4.14, on donne des conditions métriques sur  $X$  qui nous permettent de calculer la dimension conforme AR de  $X$  en utilisant l'exposant critique  $Q_X$ , défini à partir des «vraies» courbes de  $X$ , même lorsque  $X$  n'est pas connexe. Enfin, dans le Corollaire 4.16, on montre que dans le cas  $L$ -quasi-autosimilaire, il suffit de travailler avec le module des courbes de diamètre minoré. Ceci nous permet aussi de donner, dans le Corollaire 4.17, des conditions sous lesquelles la dimension conforme AR de  $X$  est égale au supremum des dimensions conformes AR de ses composantes connexes.

**2.4. Points de coupure locale et dimension conforme.** Dans le Chapitre 5, on donne des conditions sur  $X$  qui impliquent que la dimension conforme Ahlfors régulière de  $X$  est égale à 1. Ces conditions sont données en termes de points de coupure locale (condition UBR). Dans la section 1, on montre que ces conditions impliquent la connexité locale de  $X$ , et puis dans la section 2 on prouve un critère général de dimension 1 (Proposition 5.9).

**2.5. Applications.** Le Chapitre 6 est motivé par la question suivante : quels sont les groupes hyperboliques qui ont un bord à l'infini de dimension conforme Ahlfors régulière égale à 1 ? On étudie les conditions de séparation uniforme des composantes données dans le Chapitre 4, pour montrer dans le Théorème 6.2 que la dimension conforme AR de  $\partial G$  est égale au maximum des dimensions conformes AR de ses composantes. Ceci nous permet de se rendre au cas des groupes à un bout. On s'appuie sur l'étude, due à Bowditch [Bow98a], de la structure des points de coupure locale des bords de groupes hyperboliques. En mettant en relation les propriétés du scindement JSJ avec la propriété UBR sur les points de coupure locale du Chapitre 5, on déduit dans le Théorème 6.5, un critère pour  $\dim_{AR} \partial G = 1$ .

Dans le Chapitre 7, on applique le critère 5.9 pour estimer la dimension conforme AR des ensembles limites de revêtement ramifiés top. CXC. Dans la Proposition 7.6 et le Théorème 7.7, on donne des condition suffisantes qui impliquent qu'un tel ensemble limite vérifie les conditions UBR et LC. Enfin, dans la Section 2.2, on utilise la théorie des fibres et des puzzles pour montrer (Corollaire 7.12) que

l'ensemble de Julia d'un polynôme semi-hyperbolique est de dimension conforme AR égale à 1 dès qu'il est connexe. On montre aussi, dans le cas des fractions rationnelles hyperboliques, que l'existence d'un puzzle suffit pour conclure que la dimension conforme AR est un.

Dans le dernier chapitre (Chapitre 8) le lecteur trouvera un bilan des résultats de cette thèse et quelques perspectives.

### Notations générales

Dans tout le texte sauf explicitement mentionné,  $X$  désigne un espace métrique compact, doublant et uniformément parfait. On note  $\dim_H X$  la dimension de Hausdorff de  $X$  et  $\dim_T X$  sa dimension topologique. Aussi  $Z$  représentera un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov, géodésique et propre.

La distance entre deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un espace métrique est notée

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

On note la boule centrée en  $x \in X$  et de rayon  $r > 0$  par  $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ . Par le  $r$ -voisinage  $V_r(A)$  de  $A$ , on entend la réunion des boules centrées sur  $A$  de rayon  $r$ . Le diamètre de  $A$  est noté  $\text{diam}A$ . La distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$  est

$$\text{dist}_H(A, B) := \min\{\partial(A, B), \partial(B, A)\},$$

où  $\partial(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset V_r(B)\}$ . La distance relative entre  $A$  et  $B$  est

$$\Delta(A, B) := \frac{\text{dist}(A, B)}{\min\{\text{diam}A, \text{diam}B\}}.$$

Un sous-ensemble  $S$  de  $X$  est dit  $\epsilon$ -séparé, où  $\epsilon > 0$ , si pour toute paire de points  $x$  et  $y$  de  $S$  on a  $d(x, y) \geq \epsilon$ .

Si  $f(r)$  et  $g(r)$  sont deux quantités, on dit qu'elles sont comparables et on le note  $f(r) \asymp g(r)$ , s'il existe une constante  $C$ , qui ne dépend pas de  $r$ , telle que  $C^{-1}f(r) \leq g(r) \leq Cf(r)$ . Si seulement la deuxième inégalité est vraie, on note  $g(r) \lesssim f(r)$ . De manière analogue, on dit que  $f(r)$  et  $g(r)$  diffèrent d'une constante additive et on le note  $g(r) = f(r) + O(1)$ , s'il existe une constante  $C$  telle que  $|g(r) - f(r)| \leq C$ .



## CHAPITRE 2

### Ensembles quasi-autosimilaires

La définition des ensembles quasi-autosimilaires donnée en Définition 2.1 est motivée par le dictionnaire de Sullivan. Elle permet d'obtenir des énoncés généraux sur les propriétés métriques des bords des groupes hyperboliques, et des ensembles de Julia de fractions rationnelles hyperboliques. Dans cette partie on rassemble quelques propriétés des ensembles quasi-autosimilaires. Bien que la plupart soient essentiellement connues, il n'est pas toujours facile de trouver des références précises. Aussi, comme nous travaillons avec une définition de l'autosimilitude légèrement plus générale que d'autres, nous avons trouvé pertinent de donner leurs démonstrations. Dans le premier paragraphe, on montre que la jauge Ahlfors-régulière est non vide (Corollaire 2.4). Dans la section 3 Corollaire 2.13, on montre en utilisant un critère dû à J. Mackay [Mac10], qu'un espace métrique quasi-autosimilaire, localement connexe et sans points de coupure locale est de dimension conforme strictement plus grande que 1. On finit par donner dans la section 4 quelques exemples et résultats connus sur la dimension conforme des espaces quasi-autosimilaires.

#### 1. Définition et premières propriétés métriques

On commence par la définition suivante.

**DÉFINITION 2.1** (Ensemble quasi-autosimilaire). *Soit  $X$  un espace métrique compact. On dit que  $X$  est quasi-autosimilaire s'il existe :*

$$r_0, c_0 > 0 \text{ et } \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction de distorsion,} \quad (2.1.1)$$

*tels que pour tous  $x \in X$  et  $0 < r \leq \text{diam } X$ , il existe un plongement ouvert  $\eta$ -quasisymétrique  $\phi : B(x, r) \rightarrow X$  tel que*

$$\phi(B(x, r)) \supset B(\phi(x), r_0) \text{ et } \text{diam} B(\phi(x), r_0) \geq c_0. \quad (2.1.2)$$

On notera  $\phi : B(x, r) \rightarrow U$  avec  $U := \phi(B(x, r))$ . Le principe derrière la notion d'auto-similitude est le suivant : elle permet de changer d'échelle avec distorsion bornée. Elle permet notamment de quantifier des propriétés qualitatives.

Cette définition est invariante par quasisymétrie. C'est-à-dire, si  $X$  est quasi-autosimilaire et  $f : X \rightarrow X'$  est un homéomorphisme quasisymétrique, alors  $X'$  est aussi quasi-autosimilaire. En effet, on peut trouver des constantes  $r'_0$  et  $c'_0$  telles que les homéomorphismes  $\phi' := f \circ \phi \circ f^{-1}$  vérifient la Définition 2.1 pour  $X'$ .

On montre dans les lemmes suivants que les jauges conformes des ensembles quasi-autosimilaires ont de bonnes propriétés pour considérer leur dimension conforme Ahlfors régulière. Plus précisément, on montre dans le Corollaire 2.4 que  $\mathcal{J}_{AR}(X, d) \neq \emptyset$  si  $X$  est quasi-autosimilaire.

LEMME 2.2. *Si  $X$  est quasi-autosimilaire, alors  $X$  est uniformément parfait.*

DÉMONSTRATION. On prouve premièrement que  $X$  est parfait. Soient  $x \in X$ ,  $0 < r \leq \text{diam } X$  et  $\phi : B(x, r) \rightarrow U$   $\eta$ -quasisymétrique donné par la Définition 2.1. Comme  $\text{diam } B(\phi(x), r_0) \geq c_0$ , il existe  $y \in B(\phi(x), r_0)$  tel que  $d(\phi(x), y) \geq c_0/2$ . Alors  $\phi^{-1}(y) \in B(x, r) \setminus \{x\}$ , et donc  $X$  est parfait.

Comme  $X$  est compact et parfait, on a la propriété suivante : pour tout  $r > 0$  il existe une constante  $d_0 = d_0(r)$  tel que  $\text{diam } B(x, r) \geq d_0$  pour tout  $x \in X$ . Sinon, pour chaque  $n \geq 1$ , il existe  $x_n \in X$  tel que  $\text{diam } B(x_n, r) \leq 1/n$ . En prenant une sous-suite on peut supposer que  $x_n$  tend vers un point  $x \in X$ . Il existe  $y \in B(x, r/2) \setminus \{x\}$  car  $X$  est parfait. Soit  $\delta = d(y, x) > 0$ , alors  $y \in B(x_n, r)$  pour  $n$  suffisamment grand, et donc  $\delta \leq d(x, x_n) + \frac{1}{n}$  qui est une contradiction.

Supposons que  $X$  n'est pas uniformément parfait. Alors pour chaque  $n \geq 1$ , il existe  $x_n \in X$  et  $0 < r_n \leq \text{diam } X$  tels que  $B(x_n, r_n) \setminus B(x_n, r_n/n) = \emptyset$ . En prenant  $r_n$  maximal avec cette propriété, on peut supposer qu'il existe  $y_n$  tel que  $d(y_n, x_n) = r_n$ . Pour chaque  $n$  on sait qu'il existe  $\phi_n : B(x_n, 2r_n) \rightarrow X$   $\eta$ -quasisymétrique tel que  $U_n := \phi_n(B(x_n, 2r_n)) \supset B(\hat{x}_n, r_0)$ , où  $\hat{x}_n = \phi_n(x_n)$ . On note  $B_n = B(x_n, r_n)$  et  $\hat{y}_n = \phi_n(y_n)$ . On sait que  $\text{diam } B(\hat{x}_n, r_0) \geq c_0$ , donc il existe  $\hat{z}_n \in B(\hat{x}_n, r_0)$  tel que  $d(\hat{z}_n, \hat{x}_n) \geq c_0/2$ .

Nous allons montrer que

$$\text{dist}(\hat{x}, \phi(2B_n \setminus B_n)) \geq c, \text{ où } c := \frac{c_0}{2\eta(2)}. \quad (2.1.3)$$

On montre premièrement que  $\text{diam } \phi_n(\frac{1}{n}B_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En effet,  $\text{diam } 2B_n \geq d(y_n, x_n) = r_n$  et donc

$$\frac{\text{diam } \phi_n(\frac{1}{n}B_n)}{\text{diam } \phi_n(2B_n)} \leq \eta \left( 2 \frac{\text{diam } \frac{1}{n}B_n}{\text{diam } 2B_n} \right) \leq \eta \left( \frac{4}{n} \right) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

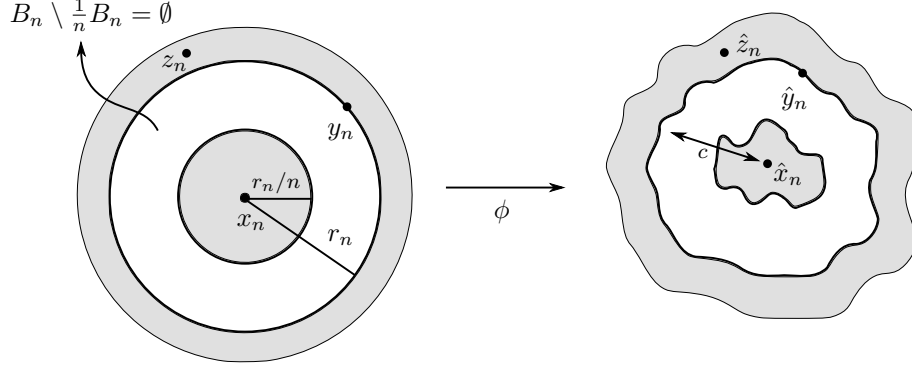


FIGURE 2.1. Démonstration du Lemme 2.2

En particulier, si on note  $z_n \in 2B_n$  la préimage de  $\hat{z}_n$ , on a  $z_n \in 2B_n \setminus B_n = 2B_n \setminus \frac{1}{n}B_n$  pour  $n$  assez grand.

Soit  $y \in 2B_n \setminus B_n$  et notons  $\hat{y} = \phi(y)$ . Si  $\hat{y} = \hat{z}_n$  alors  $d(\hat{y}, \hat{x}) \geq c_0/2$ . Donc on peut supposer  $\hat{y} \neq \hat{z}_n$ . Alors

$$\frac{d(\hat{z}_n, \hat{x}_n)}{d(\hat{y}, \hat{x}_n)} \leq \eta \left( \frac{d(z_n, x_n)}{d(y, x_n)} \right) \leq \eta \left( \frac{2r_n}{r_n} \right) = \eta(2), \quad (2.1.4)$$

et on obtient  $d(\hat{y}, \hat{x}_n) \geq \frac{c_0}{2\eta(2)} = c$ . Cela montre (2.1.3).

On peut supposer  $c \leq r_0$  de sorte que  $B(\hat{x}_n, c/2) \subset \phi_n(2B_n)$ . En fait, on a  $B(\hat{x}_n, c/2) \subset \phi_n(B_n) = \phi_n(\frac{1}{n}B_n)$  qui est une contradiction car  $\text{diam } B(\hat{x}_n, c/2) \geq d > 0$  où  $d = d(c/2)$ .  $\square$

**PROPOSITION 2.3.** *Si  $X$  est quasi-autosimilaire, alors  $X$  est doublant.*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $X$  est compact, on a la propriété suivante : il existe une constante  $N = N(R, n)$  telle que si  $K \subset X$  avec  $\text{diam } K \geq R$ , alors il existe  $\overline{B}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , des boules fermées centrées en des points de  $K$  avec  $k \leq N$ , telles que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B}_i, \quad \text{diam } \overline{B}_i \leq \frac{R}{n} \leq \frac{\text{diam } K}{n}. \quad (2.1.5)$$

En effet, soient  $R > 0$  et  $n \geq 1$  fixés. Par compacité,  $X$  est recouvert par une quantité finie  $N$  de boules  $\overline{B}(x_i, R/4n)$ , où  $x_i \in X$  pour  $1 \leq i \leq N$ . On peut réindexer les  $x_i$  de sorte que  $\{1 \leq i \leq N : \overline{B}(x_i, R/4n) \cap K \neq \emptyset\}$  soit égale à  $\{1, \dots, k\}$ . Pour  $1 \leq i \leq k$  on prend  $y_i \in \overline{B}(x_i, R/4n) \cap K$ , et on a  $\overline{B}(x_i, R/4n) \subset \overline{B}(y_i, R/2n) = \overline{B}_i$ . Alors  $K \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B}_i$ .

Soient maintenant  $K \subset X$  et  $x \in K$ . On note  $r = \text{diam } K$  de sorte que  $K \subset \overline{B}(x, r)$ . Il existe  $\phi : \overline{B} = \overline{B}(x, r) \rightarrow X$  plongement  $\eta$ -quasisymétrique avec  $\text{diam}\phi(\overline{B}) \geq c_0 > 0$ . On a  $\frac{\text{diam}\overline{B}}{\text{diam}K} \leq \frac{2r}{r} = 2$ , et cela implique

$$\frac{1}{2\eta(2)} \leq \left(2\eta\left(\frac{\text{diam}\overline{B}}{\text{diam}K}\right)\right)^{-1} \leq \frac{\text{diam}\phi(K)}{\text{diam}\phi(\overline{B})}.$$

En conclusion, on a  $\text{diam } \phi(K) \geq R = \frac{c_0}{2\eta(2)}$ . Pour chaque  $n \geq 1$ , soit  $C_n = N(R, n)$  la constante telle que (2.1.5) est vérifiée. Du coup, il existe  $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_k$  des boules fermées centrées sur  $\phi(K)$ , avec  $k \leq C_n$ ,  $\text{diam } \overline{B}_i \leq R/n$  et  $\phi(K) \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B}_i$ .

Soient  $K_i = \phi^{-1}(\overline{B}_i \cap \phi(K))$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\text{diam } K_i}{\text{diam } K} &= \frac{\text{diam } \phi^{-1}(\overline{B}_i \cap \phi(K))}{\text{diam } \phi^{-1}(\phi(K))} \leq \eta_{-1} \left( 2 \frac{\text{diam}(\overline{B}_i \cap \phi(K))}{\text{diam } \phi(K)} \right) \\ &\leq \eta_{-1} \left( 2 \frac{R/n}{R} \right) = \eta_{-1} \left( \frac{2}{n} \right), \end{aligned}$$

où  $\eta_{-1}$  est la fonction de distorsion de  $\phi^{-1}$ . On choisit  $n \geq 1$  tel que  $\eta_{-1}(\frac{2}{n}) \leq 1/2$ , et on obtient  $\text{diam } K_i \leq \text{diam } K/2$ . La constante  $C_n$  dépend seulement de  $n$  et  $R$ , lesquels dépendent seulement de  $\eta$  et  $c_0$ . Cela montre que  $X$  est doublant.  $\square$

Comme conséquence du Corollaire 14.15 de [Hei01] on obtient le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.4.** *La jauge conforme Ahlfors régulière d'un espace métrique quasi-autosimilaire est non vide.*

On établit maintenant une propriété générale qui nous sera utile dans la suite. Soient  $x \in X$ ,  $0 < r \leq \text{diam } X$  et  $\phi : B(x, r) \rightarrow U \subset X$  comme dans la Définition 2.1. Pour  $s \in (0, r)$  on note

$$\ell_s := \inf \{d(\phi(z), \phi(x)) : z \in B(x, r) \setminus B(x, s)\}. \quad (2.1.6)$$

On remarque que  $\ell_s = +\infty$  si  $B(x, r) \setminus B(x, s) = \emptyset$ . On note  $c_P = C_P^{-1}$ , où on rappelle que  $C_P \geq 1$  est la constante de perfection uniforme de  $X$ . Si  $s \in (0, c_P r)$ , alors  $\emptyset \neq \left(\overline{B(x, c_P^{-1}s)} \setminus B(x, s)\right) \subset B(x, r)$ . Soit  $y_s \in \overline{B(x, c_P^{-1}s)} \setminus B(x, s)$ , alors  $\ell_s \leq d(\phi(y_s), \phi(x))$ . Aussi on a

$$\frac{d(\phi(y_s), \phi(x))}{\text{diam } U} \leq \eta \left( 2 \frac{d(y_s, x)}{\text{diam } B(x, r)} \right) \leq \eta \left( \frac{2}{c_P^2} \frac{s}{r} \right).$$

Par conséquent,

$$\ell_s \leq \eta \left( \frac{2}{c_P^2} \frac{s}{r} \right) \cdot \text{diam } X, \quad (2.1.7)$$

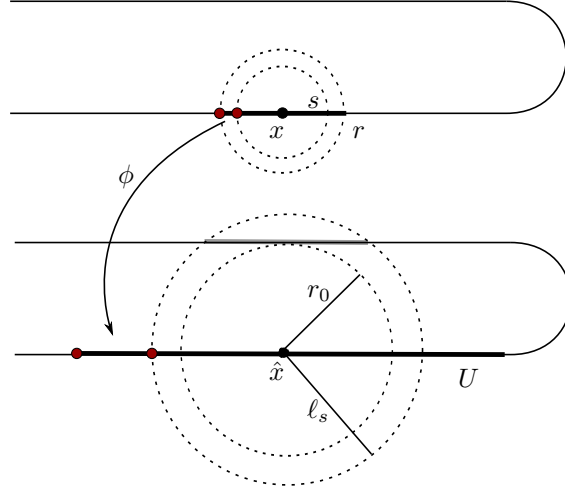


FIGURE 2.2. D'après le Lemme 2.5 il faut prendre  $s \leq \alpha \cdot r$  pour avoir  $B(\hat{x}, \ell_s) \subset U$ . Cette figure ébauche une situation dans laquelle  $\ell_s \geq r_0$ .

et donc  $\ell_s \leq r_0$  dès que  $s \leq \alpha \cdot r$ , où

$$\alpha := \eta \left( \frac{r_0}{\text{diam } X} \right) \cdot \frac{c_P^2}{2}. \quad (2.1.8)$$

On note aussi

$$L_s := \sup \{d(\phi(z), \phi(x)) : z \in B(x, s)\}.$$

On remarque que  $L_s/\ell_s \leq \eta(1)$ . Comme  $U \cap B(\phi(x), \ell_s) \subset \phi(B(x, s))$  et  $B(\phi(x), r_0)$  est contenue dans  $U$ , l'image de  $B(x, r)$  par  $\phi$ , on obtient le lemme suivant.

LEMME 2.5. *Il existe une constante  $\alpha \in (0, 1)$  telle que si  $x \in X$ ,  $0 < r \leq \text{diam } X$  et  $\phi : B(x, r) \rightarrow U \subset X$  est donné par la Définition 2.1, alors*

$$B(\phi(x), \ell_s) \subset \phi(B(x, s)) \subset B(\phi(x), \eta(1)\ell_s), \quad (2.1.9)$$

pour tout  $s \in [0, \alpha r]$ .

On finit cette partie par quelques remarques sur la classe particulière des ensembles quasi-autosimilaires pour lesquels la fonction de distorsion  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dans la Définition 2.1 est linéaire :  $\eta(t) = C \cdot t$ .

Dans ce cas, il existe une constante  $L_0 \geq 1$  telle que pour tous  $x \in X$  et  $0 < r \leq \text{diam } X$ , si  $\phi : B(x, r) \rightarrow U \subset X$  est l'homéomorphisme donné par la Définition 2.1, alors  $\phi$  est  $L_0$ -bi-Lipschitz, si on utilise la distance  $d$  normalisée par le rayon  $r$  dans la boule  $B(x, r)$ .



En effet, on choisit  $y \in B(x, r) \setminus B(x, c_P r)$  et on considère  $z, z' \in B(x, r)$ . D'un côté, on a

$$\begin{aligned} d(\phi(z), \phi(z')) &= \frac{d(\phi(z), \phi(z'))}{d(\phi(z), \phi(x))} \cdot \frac{d(\phi(z), \phi(x))}{d(\phi(y), \phi(x))} \cdot d(\phi(y), \phi(x)) \\ &\leq C^2 \cdot \frac{d(z, z')}{d(z, x)} \cdot \frac{d(z, x)}{d(y, x)} \cdot d(\phi(y), \phi(x)) \\ &= \left( C^2 \cdot \frac{d(\phi(y), \phi(x))}{d(y, x)} \right) \cdot d(z, z'). \end{aligned}$$

Comme  $d(\phi(y), \phi(x)) \leq \text{diam } X$  et  $d(y, x) \geq c_P \cdot r$ , on obtient

$$d(\phi(z), \phi(z')) \leq \left( \frac{C^2 \text{diam } X}{c_P} \right) \cdot \frac{d(z, z')}{r}. \quad (2.1.10)$$

De manière analogue, on a

$$d(\phi(z), \phi(z')) \geq \left( \frac{c_0}{2C^2\eta(c_P^{-1})} \right) \cdot \frac{d(z, z')}{r}. \quad (2.1.11)$$

On résume cette propriété dans la définition suivante qui apparaît dans [Kle06] et [BouK10].

**DÉFINITION 2.6.** *On dit que  $X$  est L-quasi-autosimilaire si la fonction de distortion  $\eta$  est linéaire. C'est-à-dire, il existe une constante  $L_0 \geq 1$  telle que : pour tout  $0 < r \leq \text{diam } X$  et pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U \subset X$  et une application  $\phi : (B(x, r), \frac{d}{r}) \rightarrow (U, d)$  bi-Lipschitz de constante  $L_0$ .*

Deux exemples très importants d'ensembles L-quasi-autosimilaires sont les bords des groupes hyperboliques et les ensembles de Julia des fractions rationnelles hyperboliques. On repousse la preuve de ces deux affirmations aux sections 3 du Chapitre 6 (Proposition 6.8) et 2.2 du Chapitre 7 respectivement. D'autres exemples d'espaces L-quasi-autosimilaires sont le triangle et le tapis de Sierpiński, l'éponge de Menger et d'autres fractales classiques.

## 2. Sur la connexité locale

On rappelle la définition suivante.

**DÉFINITION 2.7** (Connexité locale). *Soit  $X$  connexe. Pour  $x, y \in X$  on définit*

$$\delta(x, y) := \inf\{\text{diam } J : J \text{ est un continuum avec } x, y \in J\}. \quad (2.2.1)$$

Pour  $r > 0$  soit

$$h(r) := \sup\{\delta(x, y) : d(x, y) \leq r\}. \quad (2.2.2)$$

Alors on dit que  $X$  est localement connexe si  $h(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$ . La fonction  $h$  est un module de connexité locale.

La version quantitative de la connexité locale est la suivante.

**DÉFINITION 2.8** (Connexité linéaire). *On dit que  $X$  est linéairement connexe (LC) s'il existe une constante  $C_\ell \geq 1$  telle que pour tous  $x \in X$  et  $0 < r \leq \text{diam} X$ , tous  $y, z \in B(x, r)$  appartiennent à un sous-ensemble connexe de  $X$  contenue dans  $B(x, C_\ell r)$ .*

La définition implique que  $X$  est connexe et localement connexe, et que l'on peut choisir le module de connexité locale linéaire. Donc, si  $X$  est compact, elle implique aussi que  $X$  est localement connexe par arcs. On peut donner l'interprétation suivante : si on suppose que  $X$  est LC, alors on peut définir la distance

$$d_1(x, y) = \inf\{\text{diam } \gamma : \gamma \text{ est une courbe qui joint } x \text{ et } y\},$$

qui est bi-Lipschitz équivalente à  $d$  :  $d \leq d_1 \leq C_\ell d$ . Pour la métrique  $d_1$ , toute boule  $B_{d_1}(x, r)$  avec  $x \in X$  et  $r > 0$  est connexe par arcs.

**REMARQUE.** La propriété d'être localement connexe n'est pas une conséquence directe de la connexité quand  $X$  est quasi-autosimilaire, par cause de l'absence de «transitivité» dans la Définition 2.1. Par exemple, soit  $X \subset \mathbb{R}^2$  l'ensemble

$$X := \partial([0, 1] \times [0, 1]) \cup \bigcup_{k \geq 1} [0, 1] \times \{1/2^k\}.$$

Alors  $X$  est connexe et quasi-autosimilaire, mais n'est pas localement connexe.

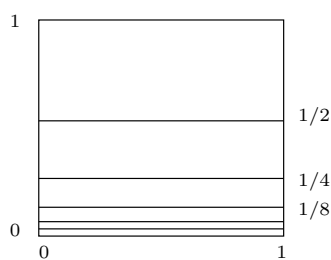


FIGURE 2.3. Exemple d'un ensemble quasi-autosimilaire connexe qui n'est pas localement connexe.

**PROPOSITION 2.9.** *Si  $X$  est quasi-autosimilaire et localement connexe, alors  $X$  est LC.*

**DÉMONSTRATION.** On a la propriété suivante : pour tout  $r_0 > 0$ , il existe une constante  $K_0 = K(r_0) \geq 1$  telle que pour tous  $a \in X$  et  $r_0 \leq r \leq \text{diam } X$ , si  $x, y \in$

$B(a, r/K_0)$ , alors il existe un arc  $J \subset B(a, r)$  qui joint  $x$  et  $y$ . En effet, si  $B(a, r)$  est une boule de  $X$ , on sait que tous  $x, y \in B(a, r)$  peuvent se connecter par un arc contenu dans  $B(a, r + h(2r))$ . Soit  $\delta > 0$  tel que si  $r \leq \delta$  on a  $r + h(2r) < r_0$ . Alors si on prend  $r_0 \leq r \leq \text{diam} X$ , toute paire de points  $x, y \in B(a, \delta)$  peut se connecter par un arc dans  $B(a, r_0) \subset B(a, r)$ . Du coup, il suffit de prendre  $K_0 = \frac{\text{diam } X}{\delta}$ .

Soit  $r > 0$  arbitraire. On sait qu'il existe un plongement  $\eta$ -quasisymétrique  $\phi : B = B(a, r) \rightarrow X$  avec  $\phi(B(a, r)) \supset B(\hat{a}, r_0)$ , où  $\hat{a} = \phi(a)$ . Toute paire de points  $\hat{x}, \hat{y} \in B(\hat{a}, r_0/K_0)$  peut se connecter par un arc dans  $B(\hat{a}, r_0)$ . Soit  $A = \phi^{-1}(B(\hat{a}, r_0/K_0))$ . D'un côté on sait que

$$\frac{r_0/K_0}{\text{diam } X} \leq \frac{\text{diam } \phi(A)}{\text{diam } \phi(B)} \leq \eta \left( 2 \frac{\text{diam } A}{\text{diam } B} \right),$$

et alors  $\text{diam } A \geq c \cdot \text{diam } B \geq cr$  avec  $c := \frac{1}{2}\eta^{-1} \left( \frac{r_0}{K_0 \text{diam } X} \right)$ . D'un autre côté, on sait qu'il existe  $s > 0$  tel que  $B(\hat{a}, s) \subset A \subset B(\hat{a}, \eta_{-1}(1)s)$ . Mais comme  $2\eta_{-1}(1)s \geq \text{diam } A$ , on a  $s \geq \frac{1}{K_1}r$  où  $K_1 = \frac{2\eta_{-1}(1)}{c}$ . Comme toute paire de points de  $A$  peut se connecter par un arc dans  $B(a, r)$ , c'est en particulier vrai pour toute paire de points de  $B(a, r/K_1)$ .  $\square$

REMARQUE. Quand  $X$  n'est pas connexe, des arguments analogues montrent qu'il existe une constante  $C_\ell \geq 1$  telle que chaque composante connexe de  $X$  est LC de constante  $C_\ell$ , si  $X$  vérifie les hypothèses suivantes :

- $\phi$  préserve les composantes connexes de  $X$  : si  $Y$  est une composante connexe de  $X$  et  $\phi : B \rightarrow U$  est une application donnée par la Définition 2.1, alors  $\phi(Y \cap B) \subset Y'$ , où  $Y'$  est une composante connexe de  $X$ .
- chaque composante connexe de  $X$  est localement connexe, et
- le diamètre des composantes connexes de  $X$  tend vers zéro : pour tout  $\delta > 0$ , seulement une quantité finie de composantes connexes de  $X$  ont un diamètre plus grand que  $\delta$ .

Si le diamètre des composantes connexes de  $X$  ne tend pas vers zéro, alors le résultat est faux. En effet, il existe des ensemble de Julia de fractions rationnelles hyperboliques, ayant une composante connexe qui n'est même pas LC [PT00].

### 3. Ensembles quasi-autosimilaires sans point de coupure locale

On rappelle que  $x$  est un point de coupure de  $X$  s'il sépare deux points de  $X$  ; il est un point de coupure locale s'il existe un ouvert connexe  $U \subset X$  qui le contient et tel que  $U \setminus \{x\}$  n'est pas connexe. La définition suivante, qui est une

version quantitative de la non existence des points de coupure locale, apparaît dans [Mac10] Définition 3.2.

DÉFINITION 2.10 (ALC). *On dit que  $X$  n'a pas de point de coupure locale quantitativement s'il existe une constante  $L \geq 1$  telle que :*

- (1)  *$X$  est LC de constante  $L$  et*
- (2) *pour tous  $p \in X$ ,  $r > 0$  et  $x, y \in A(p, r, 2r)$  il existe un continuum  $J \subset A(p, r/L, 2Lr)$  qui contient  $x$  et  $y$ , où  $A(p, r, R) = \overline{B(p, R)} \setminus B(p, r)$ .*

Il faut remarquer que, quitte à remplacer  $L$  par une constante plus grande dans la définition, le point 2 implique le point 1 ; voir les commentaires d'après la Définition 3.2 dans [Mac10]. Si  $G$  est un groupe hyperbolique de bord connexe et sans point de coupure locale, alors  $\partial G$  n'a pas de point de coupure locale quantitativement (voir la preuve du Corollaire 1.2 dans [Mac10]). Dans la Proposition 2.12, on montre que ce résultat est aussi vrai dans le cadre plus général des ensembles quasi-autosimilaires. On a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.11. *Supposons que  $X$  est LC de constante  $L$ . Soient  $p \in X$ ,  $0 < s < r \leq \text{diam } X$  et  $x, y \in B(p, r) \setminus B(p, s)$ . Si  $d(x, y) \leq \frac{1}{2L}d(x, p)$ , alors il existe un arc  $J$  qui joint  $x$  et  $y$  contenu dans l'anneau  $A(p, s/2, 2r)$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $d(x, y) \leq \frac{1}{2L}d(x, p)$ . Alors on sait qu'il existe un arc  $J$  qui joint  $x$  et  $y$  avec  $\text{diam } J \leq Ld(x, y) \leq \frac{1}{2}d(x, p)$ . Pour  $w \in J$  on a

$$d(x, p) \leq \text{diam } J + d(w, p) \leq \frac{1}{2}d(x, p) + d(w, p).$$

Donc  $d(w, p) \geq \frac{1}{2}d(x, p) \geq s/2$ . Cela implique que  $J \cap B(p, s/2) = \emptyset$ . Aussi on a  $J$  contenu dans  $B(p, 2r)$ .  $\square$

PROPOSITION 2.12. *Si  $X$  est quasi-autosimilaire, localement connexe, et sans point de coupure local, alors  $X$  n'a pas de point de coupure locale quantitativement.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $X$  ne vérifie pas la condition ALC. Alors pour chaque  $n \geq 1$  il existe  $x_n, y_n, p_n \in X$ ,  $r_n > 0$  avec  $x_n, y_n \in A(p_n, r_n, 2r_n)$  tels que  $x_n$  et  $y_n$  ne peuvent pas se connecter dans  $A(p_n, r_n/n, 2nr_n)$ .

Soit  $L' = \alpha^{-1}L$ , où  $\alpha \in (0, 1)$  est donné par le Lemme 2.5 et  $L$  est la constante de LC. Pour chaque  $n \geq 1$ , soit  $\phi_n : B(p_n, 2L'r_n) \rightarrow U_n \subset X$  le plongement  $\eta$ -quasisymétrique donné par la Définition 2.1, tel que  $U_n \supset B(\hat{p}_n, r_0)$ , où  $\hat{p}_n = \phi_n(p_n)$ . On note  $\hat{x}_n = \phi_n(x_n)$  et  $\hat{y}_n = \phi_n(y_n)$ .

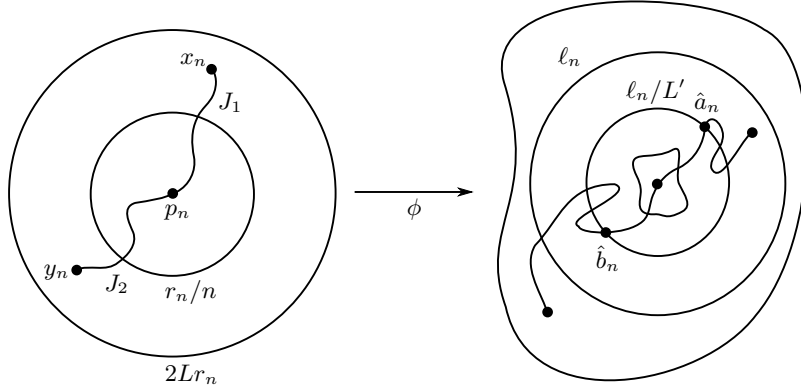


FIGURE 2.4. Démonstration de la Proposition 2.12

On sait d'après le Lemme 2.5 que pour chaque  $n \geq 1$ , il existe  $\ell_n > 0$  tel que  $B(\hat{p}_n, \ell_n) \subset \phi_n(B(p_n, 2Lr_n)) \subset B(\hat{p}_n, \eta(1)\ell_n)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\text{diam } \phi_n(B(p_n, 2Lr_n))}{\text{diam } U_n} &\geq \left( \eta \left( 2 \frac{\text{diam } B(p_n, 2Lr_n)}{\text{diam } B(p_n, 2Lr_n)} \right) \right)^{-1} \\ &\geq \eta \left( \frac{4L'r_n}{2Lr_n} \right)^{-1} = \eta (2\alpha^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

et donc  $\ell_n \geq c \cdot r_0$ , où  $c = \frac{c_P \eta (2\alpha^{-1})}{2\eta(1)}$ . Si on considère la composante connexe de  $B(p_n, 2Lr_n)$  qui contient  $p_n$ , elle contient  $B(p_n, 2r_n)$ , et donc contient aussi  $x_n$  et  $y_n$ . Alors il existe un arc  $J_1$  qui joint  $x_n$  et  $p_n$  dans  $B(p_n, 2Lr_n)$ , et un autre  $J_2$  qui joint  $y_n$  à  $p_n$ . Soient  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  les images de  $J_1$  et  $J_2$  par  $\phi_n$ . Soient alors  $\hat{a}_n$  et  $\hat{b}_n$  les premiers points d'intersection de  $\hat{J}_1$  et  $\hat{J}_2$  avec  $\partial B(\hat{p}_n, \ell_n/L')$  respectivement.

Tout arc  $J$  contenu dans  $B(\hat{p}_n, \ell_n)$ , qui joint  $\hat{a}_n$  et  $\hat{b}_n$ , doit nécessairement intersecter l'image par  $\phi_n$  de  $B(p_n, r_n/n)$ <sup>1</sup>. Sinon, en prenant la préimage par  $\phi_n$ , on obtiendrait un arc qui joindrait  $x_n$  et  $y_n$  contenu dans  $B(p_n, 2Lr_n)$  et qui ne passerait pas par  $B(p_n, r_n/n)$ .

D'après le Lemme 2.11 (avec  $r = \ell_n$  et  $s = \ell_n/L'$ ), il existe une constante  $N$  suffisamment grande telle que

$$d(\hat{a}_n, \hat{b}_n) \geq \frac{1}{N} d(\hat{a}_n, \hat{p}_n).$$

Car sinon on aurait un arc  $J$  qui joindrait  $\hat{a}_n$  et  $\hat{b}_n$  dans  $B(\hat{p}_n, \ell_n)$  mais qui ne passerait pas par  $\phi_n(B(p_n, r_n/n))$ , et donc une contradiction.

1. On remarque aussi que  $\text{diam } \phi_n(B(p_n, r_n/n)) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc on a  $d(\hat{a}_n, \hat{b}_n) \gtrsim \ell_n$ . En prenant une sous-suite, on peut supposer que  $\hat{p}_n \rightarrow \hat{p}$ ,  $\hat{a}_n \rightarrow \hat{a}$ ,  $\hat{b}_n \rightarrow \hat{b}$  et que  $\ell_n \rightarrow \ell \geq c \cdot r_0$ . On sait alors que  $\hat{p}, \hat{a}$  et  $\hat{b}$  sont trois points distincts.

De plus  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  appartiennent à  $B(\hat{p}, \ell/L)$ , et donc appartiennent à la composante connexe (qui est un ouvert connexe) de  $B(\hat{p}, \ell)$  qui contient  $\hat{p}$ . Comme  $X$  n'a pas de point de coupure locale, il existe un arc  $J$  qui joint  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  dans cette composante connexe, mais qui ne passe pas par  $\hat{p}$ . Comme  $J$  est contenu dans la boule  $B(\hat{p}, \ell)$ , on a  $J \subset B(\hat{p}_n, \ell_n)$  pour  $n$  suffisamment grand. Alors, si on note  $\delta := \text{dist}(\hat{p}, J) > 0$ , on a  $J \cap \phi_n(B(p_n, r_n/n)) = \emptyset$  pour  $n$  suffisamment grand. En joignant  $\hat{a}_n$  à  $\hat{a}$  et  $\hat{b}_n$  à  $\hat{b}$  avec de petits arcs, on obtient un arc qui joint  $\hat{a}_n$  et  $\hat{b}_n$  sans couper  $\phi_n(B(p_n, r_n/n))$  qui est une contradiction. Cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

D'après le Théorème 1.1 de [Mac10], si  $X$  est un espace métrique complet, doublant et qui vérifie la condition ALC, alors la dimension conforme (de Hausdorff) de  $X$ , et en particulier sa dimension conforme AR, est strictement plus grande qu'un. Comme corollaire on obtient

**COROLLAIRE 2.13.** *Soit  $X$  un espace métrique quasi-autosimilaire, localement connexe et sans point de coupure locale. Alors  $\dim_{AR} X > 1$ .*

#### 4. Deux exemples : les cercles et les ensembles de Cantor QAS

On finit ce chapitre avec deux exemples, bien connus, dont la notion d'autosimilarité permet de décrire leurs jauges conformes : l'ensemble triadique de Cantor et le cercle.

On commence par étudier les ensembles de Cantor quasi-autosimilaires, c'est-à-dire les espaces métriques quasi-autosimilaires qui sont totalement discontinus. On rappelle que  $X$  est totalement discontinu si les composantes connexes de  $X$  sont des points. On note  $\text{Cantor}_{QAS}$  la collection de ces espaces. La définition suivante apparaît dans [DS97] Chapitre 15, voir aussi [MT10].

**DÉFINITION 2.14.** *On dit que  $X$  est uniformément discontinu s'il existe une constante  $C \geq 1$  tel que pour tous  $a \in X$  et  $0 < r \leq \text{diam } X$  il existe  $A \subset X$  tel que*

$$B(a, r/C) \subset A \subset B(a, r) \quad \text{et} \quad \text{dist}(A, X \setminus A) \geq r/C$$

**REMARQUE.** Comme la distance de  $A$  à son complémentaire est strictement positive,  $A$  est ouvert et fermé. En particulier,  $X$  est totalement discontinu. Pour une généralisation de cette définition voir la Remarque 2 qui suit le Théorème 4.14.

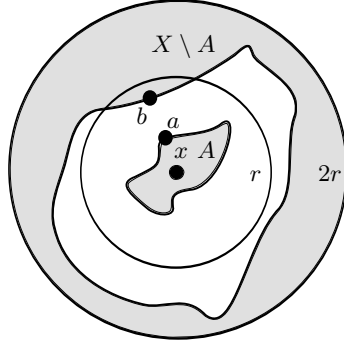


FIGURE 2.5. Démonstration de la Proposition 2.15.

PROPOSITION 2.15. *Si  $X$  est quasi-autosimilaire et totalement discontinu, alors  $X$  est uniformément discontinu.*

DÉMONSTRATION. On montre premièrement que la Définition 2.14 est vérifiée à grande échelle. Soit  $r_0 > 0$  fixé, et supposons qu'il existe des suites  $r_n \geq r_0$  et  $x_n \in X$ , tels que pour tout  $A \subset X$  avec  $B(x_n, r_n/n) \subset A \subset B(x_n, r_n)$ , on ait  $\text{dist}(A, X \setminus A) \leq r_n/n$ . En prenant des sous-suites si nécessaire, on peut supposer que  $x_n$  tend vers un point  $x \in X$ .

Comme  $X$  est totalement discontinu, il existe  $A \subset X$  ouvert et fermé, tel que  $x \in A$  et  $A \subset B(x, r_0/2)$ . En particulier, comme  $A$  est ouvert et fermé, il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset A$  et  $\text{dist}(A, X \setminus A) \geq \delta$ .

Donc pour  $n$  suffisamment grand on a

- (1)  $B(x, r_0/2) \subset B(x_n, r_n)$ ,
- (2)  $\frac{r_n}{n} \leq \frac{\text{diam} X}{n} \leq \delta$  et donc  $B(x_n, r_n/n) \subset B(x, \delta) \subset A$ ,

qui est une contradiction.

Soit maintenant  $0 < r < r_0$ , et  $r' = \alpha^{-1} \cdot r$  où  $\alpha \in (0, 1)$  est donné par le Lemme 2.5. On sait qu'il existe  $\phi : B_{2r'} := B(x, 2r') \rightarrow X$ ,  $\eta$ -quasisymétrique tel que  $\phi(B_{2r'}) \supset B_{r_0} := B(\hat{x}, r_0)$ , où  $\hat{x} = \phi(x)$ .

Soit  $\hat{B} = \phi(B_r)$ , d'après le Lemme 2.5, il existe  $s_0 > 0$  tel que  $B(\hat{x}, s_0) \subset \hat{B} \subset B(\hat{x}, \eta(1)s_0)$ . Soit  $C_P \geq 1$  la constante de perfection uniforme de  $X$ . Comme

$$\frac{\text{diam } \hat{B}}{\text{diam } \phi(B_{2r'})} \geq \left( 2\eta \left( \frac{\text{diam } B_{2r'}}{\text{diam } B_r} \right) \right)^{-1} \geq \left( 2\eta \left( \frac{4r'}{r/C_P} \right) \right)^{-1},$$

on a  $s_0 \geq c \cdot r_0$  avec  $c := \frac{c_P}{4\eta(1)\eta(4C_P\alpha^{-1})}$ .

On sait aussi qu'il existe  $\hat{A} \subset X$  tel que  $B(\hat{x}, s_0/K) \subset \hat{A} \subset B(\hat{x}, s_0)$  et

$$\text{dist}(\hat{A}, X \setminus \hat{A}) \geq s_0/K.$$

Soit  $A = \phi^{-1}(\hat{A})$ , et soit  $s_1 > 0$  tel que

$$B(x, s_1) \subset \phi^{-1}(B(\hat{x}, s_0/K)) \subset B(x, \eta_{-1}(1)s_1).$$

Donc  $2\eta_{-1}(1)s_1 \geq \text{diam} \phi^{-1}(B_{s_0/K})$ . Alors

$$\frac{c_0 r_0}{C_P K \text{diam } X} \leq \frac{s_0}{C_P K \text{diam } X} \leq \frac{\text{diam } B_{s_0/K}}{\text{diam } \phi(B_{2r'})} \leq \eta \left( 2 \frac{\text{diam } \phi^{-1}(B_{s_0/K})}{\text{diam } B_{2r'}} \right),$$

d'où on obtient

$$\text{diam } \phi^{-1}(B_{s_0/K}) \geq \eta^{-1} \left( \frac{c_0 r_0}{C_P K \text{diam } X} \right) \frac{r}{C_P}.$$

Donc il existe une constante  $c_1 > 0$  tel que  $s_1 \geq c_1 \cdot r$ .

Soient maintenant  $a \in A$  et  $b \in X \setminus A$  tels que  $d(a, b) = \text{dist}(A, X \setminus A)$ . Si  $b \notin B_{2r'}$ , alors comme  $A \subset B_r$ , on a  $\text{dist}(A, X \setminus A) \geq r$ . Sinon, soient  $\hat{a} = \phi(a)$  et  $\hat{b} = \phi(b)$ . Alors

$$\frac{s_0}{K \text{diam } X} \leq \frac{d(\hat{a}, \hat{b})}{d(\hat{x}, \hat{b})} \leq \eta \left( \frac{d(a, b)}{d(x, b)} \right).$$

Mais comme  $s_1 \leq d(x, b)$  on a  $d(a, b) \gtrsim s_1 \gtrsim r$ . Cela finit la preuve.  $\square$

Comme tous les espaces  $X$  quasisymétriques à l'ensemble triadique de Cantor de l'intervalle  $[0, 1]$  sont quasi-autosimilaires, d'après la Proposition 2.15 on peut énoncer ainsi le théorème suivant de David et Semmes (voir [DS97] Proposition 15.11) :

**THÉORÈME 2.16 (David-Semmes).** *Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble triadique de Cantor de l'intervalle  $[0, 1]$ . Alors la jauge conforme de  $\mathcal{C}$  est donnée par*

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}) = \text{Cantor}_{\text{QAS}}. \quad (2.4.1)$$

*En particulier, la dimension conforme de tout ensemble de Cantor quasi-autosimilaire est égale à zéro.*

Il existe aussi une caractérisation similaire de la jauge conforme du cercle  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . En effet, nommons tout espace métrique quasi-autosimilaire homéomorphe au cercle  $S^1$  un *cercle quasi-autosimilaire*. On note cette collection d'espaces par  $\text{Cercle}_{\text{QAS}}$ . D'après les Propositions 2.3 et 2.9 un cercle quasi-autosimilaire est doublant et LC. Par conséquent, on peut énoncer de la façon suivante le théorème de Tukia et Väisälä [TV] :



THÉORÈME 2.17. *La jauge conforme du cercle  $S^1$  est donnée par  $\mathcal{J}(S^1) = \text{Cercle}_{\text{QAS}}$ . En particulier, la dimension conforme de tout cercle quasi-autosimilaire est égale à 1.*

On remarque qu’une caractérisation de ce type est fausse en général. Par exemple, il existe une infinité de tapis de Sierpiński quasi-autosimilaires qui ne sont pas quasisymétriquement équivalents ; voir [B06] pour une exposition détaillée à propos des propriétés quasisymétriques du tapis de Sierpiński. Voir aussi [HP10] pour une infinité d’exemples d’ensembles de Julia de fractions rationnelles expansives, homéomorphes au tapis de Sierpiński, qui ne sont pas quasisymétriquement équivalents entre eux.

## CHAPITRE 3

### Jauge conforme des espaces métriques compacts

Le but de cette partie est de montrer comment à partir d'une suite de discrétisations d'un espace métrique compact, on peut construire des distances dans la jauge conforme (Ahlfors régulière) de dimension contrôlée. Pour construire des distances dans la jauge on utilise des outils et constructions de la géométrie des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Cette approche est basée sur l'hyperbolicité des *points de vue* d'un espace compact. Par points de vue, on veut dire les boules de l'espace, dans le sens qu'une boule représente un «instantané» de l'espace en un certain point et à une certaine échelle. La terminologie provient de l'anglais «snapshot» utilisée par S. Semmes dans [S01].

Dans la section 1 on reproduit une construction de Bourdon et Pajot (qui est inspirée d'une construction voisine dû à G. Elek, voir [Elek97]) qui nous permet de voir la jauge conforme d'un espace métrique compact  $(X, d)$  comme la jauge canonique du bord d'un espace hyperbolique (Proposition 3.1). Cet espace hyperbolique est un graphe qui reflète la combinatoire des boules de  $(X, d)$ . Dans la section 2, on utilise cette construction pour caractériser, dans le Théorème 3.3, la jauge conforme (Ahlfors régulière) de  $(X, d)$ . Finalement, dans les sections 3.1 et 3.2, on donne des conditions suffisantes qui nous permettront de construire des distances dans la jauge de dimension donnée (Théorème 3.10), et d'adapter les hypothèses du Théorème 3.3 pour travailler avec le module combinatoire (Proposition 3.14).

#### 1. Structure hyperbolique des points de vue d'un espace compact

**1.1. Construction du graphe.** On suppose dans la suite que  $X$  est doublant, uniformément parfait et  $\text{diam} X < 1$ . La construction suivante apparaît dans [BP03] section 2.1. Soient  $a > 1$  et  $\lambda \geq 2$ , les constructions qui suivent dépendent de ces deux paramètres. Pour  $k \geq 0$  on note  $S_k$  un sous-ensemble  $a^{-k}$ -séparé maximal de  $X$ . Par définition,  $\mathcal{S}_k := \{B_k(x) := B(x, a^{-k}) : x \in S_k\}$  est un recouvrement de  $X$  pour chaque  $k \geq 0$ . On suppose qu'ils satisfont  $S_0 \subset S_1 \subset \dots$ , et on note  $\mathcal{S} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{S}_k$ . On remarque que  $S_0 = \{x\}$  car  $\text{diam} X < 1$ . Si  $x \in S_k$  et  $B := B_k(x)$ , on note  $|B| = k$ .

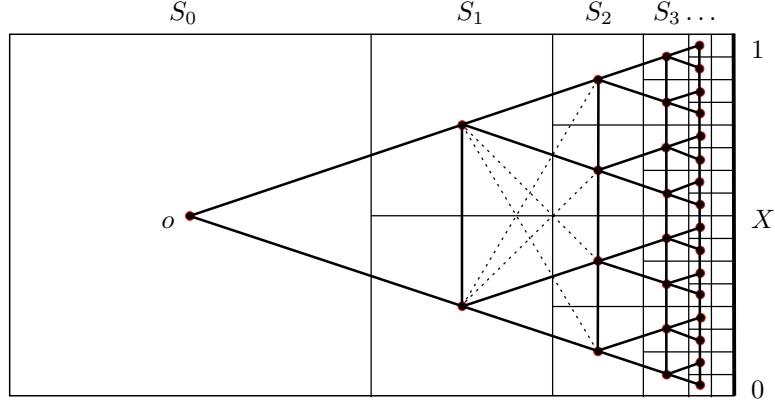


FIGURE 3.1. Soit  $X$  l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On choisit  $a = 1/2$  et  $\lambda = 1$ . Pour chaque  $k \geq 0$  soit  $S_k$  l'ensemble des milieux des intervalles dyadiques  $\{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] : j = 0, \dots, 2^k\}$ . Alors  $S_k$  est un ensemble  $2^{-k}$ -séparé maximal. La figure montre un ébauche du graphe  $G$ . La longueur des arêtes est égale à 1, et on peut voir la nature hyperbolique de  $G$ .

On définit le graphe  $G$  comme suit. Ses sommets, qu'on note  $V(G)$ , sont les boules de  $\mathcal{S}$ , et deux sommets distincts  $B$  et  $B'$  sont liés par une arête si

$$||B| - |B'|| \leq 1 \quad \text{et} \quad \lambda \cdot B \cap \lambda \cdot B' \neq \emptyset.$$

Pour alléger les notations on identifie les boules de  $\mathcal{S}_k$  avec leurs centres dans  $S_k$ , en espérant que l'ambiguïté  $S_k \subset S_{k+1}$  ne cause pas de confusion. Quand il sera nécessaire on précisera le niveau  $k$  d'un point  $x$ . On dit que  $x, y \in S_k$  sont voisins, et on note  $x \sim y$ , si  $x = y$  ou si  $B_k(x)$  et  $B_k(y)$  sont connectés par une arête de  $G$ . On munit  $G$  de la métrique de longueur obtenue en identifiant chaque arête isométriquement au segment  $[0, 1]$ ; on note cette distance  $|x - y|$ . On désigne par  $o$  le point de  $S_0$ ; de cette façon,  $S_k$  est la sphère de centre  $o$  et rayon  $k$  de  $G$ . Voir la Figure 3.1.

Avant de continuer on rappelle quelques notions des espaces hyperboliques au sens de Gromov. On se réfère à [CDP90] et [GH90] pour une exposition détaillée. Soit  $Z$  un espace métrique, on dit que  $Z$  est *propre* si les boules fermées sont compactes. Une *géodésique* est une isométrie d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $Z$ . On dit que  $Z$  est un espace géodésique si pour toute paire de points, il existe une géodésique qui les joint. Quand  $Z$  est géodésique, propre et non borné, on utilise la notation  $|x - y|$  pour la distance de  $Z$ . Fixons  $o \in Z$  un point base et notons  $|x| = |x - o|$

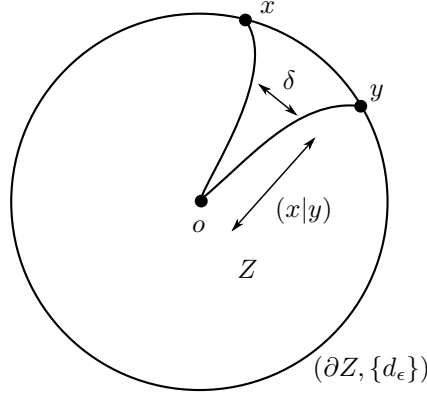


FIGURE 3.2. La jauge conforme canonique pour les bords des espaces hyperboliques au sens de Gromov.

pour  $x \in Z$ . Le produit de Gromov de deux points  $x, y \in Z$  vu du point  $o$ , est défini par

$$(x|y) = \frac{1}{2} (|x| + |y| - |x - y|).$$

On dit que  $Z$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov, où  $\delta \geq 0$ , si

$$(x|y) \geq \min \{(x|z), (z|y)\} - \delta,$$

pour tous  $x, y, z \in Z$ . Un *rayon issu de  $o$*  est une géodésique  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow Z$  telle que  $\gamma(0) = o$ . Soit  $\mathcal{R}_\infty$  l'ensemble des rayons issus de  $o$ . Le bord de Gromov de  $Z$ , qu'on note  $\partial Z$ , est défini comme le quotient de  $\mathcal{R}_\infty$  par la relation d'équivalence suivante : deux rayons  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont équivalents si  $\text{dist}_H(\gamma_1, \gamma_2) < +\infty$ . L'espace  $Z \cup \partial Z$  est une compactification de  $Z$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on note  $\phi_\varepsilon : Z \rightarrow (0, +\infty)$  l'application  $\phi_\varepsilon(x) = \exp(-\varepsilon|x|)$ . On définit une nouvelle métrique sur  $Z$  en posant

$$d_\varepsilon(x, y) = \inf_{\gamma} \ell_\varepsilon(\gamma), \text{ où } \ell_\varepsilon(\gamma) = \int_{\gamma} \phi_\varepsilon, \quad (3.1.1)$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes  $\gamma$  de  $Z$  qui joignent  $x$  et  $y$ . L'espace  $(Z, d_\varepsilon)$  est borné et non complet. Soit  $\overline{Z}_\varepsilon$  le complété de  $(Z, d_\varepsilon)$ , on note  $\partial_\varepsilon Z = \overline{Z}_\varepsilon \setminus Z$ . Quand  $Z$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov, il existe  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$  telle que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\partial_\varepsilon Z$  coïncide avec le bord de Gromov de  $Z$ , et  $d_\varepsilon$  est une *métrique visuelle* de paramètre  $\varepsilon$ . C'est-à-dire, on peut étendre le produit de Gromov au bord  $\partial Z$ , et pour tous  $x, y \in \partial Z$  on a

$$d_\varepsilon(x, y) \asymp \exp(-\varepsilon(x|y)). \quad (3.1.2)$$

On peut interpréter les inégalités (3.1.2) de la façon suivante : si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux géodésiques qui représentent respectivement les points  $x$  et  $y$  de  $\partial Z$ , alors le produit de Gromov  $(x|y)$  mesure la longueur sur laquelle ces deux géodésiques sont à distance comparable à  $\delta$ . Alors ces deux points du bord sont proches pour la métrique visuelle si les deux géodésiques sont à distance comparable à  $\delta$  pendant une longue période de temps. Comme les métriques visuelles de  $\partial Z$  sont toutes quasisymétriques entre elles, elles définissent une jauge conforme *canonique* sur  $\partial Z$ .

Dans notre cas, comme  $X$  est doublant,  $G$  est de valence finie, et donc  $G$  est un espace propre. Comme il est un espace de longueur, il est aussi un espace géodésique. Les sommets d'un rayon  $\gamma$  issu de  $o$  déterminent une suite de boules  $B_k = B_k(x_k)$ , avec  $\lambda \cdot B_k \cap \lambda \cdot B_{k+1} \neq \emptyset$ . Une telle suite de boules a un unique point limite dans  $X$  qu'on note  $\mathbf{p}(\gamma)$ . Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux rayons à distance finie, alors  $\mathbf{p}(\gamma_1) = \mathbf{p}(\gamma_2)$ . Aussi comme la suite  $\{\mathcal{S}_k\}$  est une suite de recouvrements, l'application  $\mathbf{p} : \mathcal{R}_\infty \rightarrow X$  est surjective. La proposition suivante de Bourdon et Pajot, nous permet d'utiliser les notions de géométrie hyperbolique pour étudier la jauge conforme de  $X$ .

**PROPOSITION 3.1** ([BP03] Proposition 2.1). *Le graphe  $G$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov. L'application  $\mathbf{p}$  induit un homéomorphisme entre  $\partial G$  et  $X$ , et la métrique  $d$  de  $X$  est une métrique visuelle de paramètre  $\log a$ , c'est-à-dire, pour tous  $\xi, \eta \in \partial G$  on a*

$$d(\mathbf{p}(\xi), \mathbf{p}(\eta)) \asymp a^{-(\xi|\eta)}.$$

*En particulier, avec cette identification la jauge de  $X$  coïncide avec la jauge canonique de  $\partial G$ .*

**REMARQUE.** La première chose à remarquer est que si on définit la distance dans  $G$  en rendant la longueur des arêtes égale à  $\log a$  à la place de 1, on obtient la distance  $d$  comme une métrique visuelle de paramètre visuel 1.

Deuxièmement, de la preuve de la proposition on sait que la constante de comparaison dépend de  $\lambda$  et  $a$  : en effet pour toute paire de boules  $B$  et  $B'$  de  $G$  on a

$$\frac{1}{a} \cdot a^{-(B|B')} \leq \text{diam}(B \cup B') \leq \frac{4\lambda a}{2a-1} \cdot a^{-(B|B')}.$$

Cela montre que la distorsion de  $\mathbf{p}$  tend vers l'infini quand  $a \rightarrow \infty$ . Par contre, la constante d'hyperbolicité (avec la distance de longueur égale à 1) est donnée par  $\delta = \log_a \left( \frac{8\lambda a^2}{2a-1} \right)$ , qui reste bornée avec  $a$ .

**1.2. La notion de généalogie.** Pour utiliser le graphe et caractériser la jauge de  $(X, d)$  on a besoin de la notion suivante. On définit la notion de *généalogie* sur  $S$  induite par une suite de “partitions” de  $X$ . Soit  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_k\}_{k \geq 0}$  la suite de familles de sous-ensembles de  $X$  définie par  $\mathcal{V}_k = \{V_k(x) : x \in S_k\}$  où pour chaque  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ ,  $V_k(x) \subset X$  est l'ensemble défini par

$$V_k(x) = \{y \in X : d(y, x) = \text{dist}(y, S_k)\}. \quad (3.1.3)$$

Les ensembles de  $\mathcal{V}_k$  vérifient les propriétés suivantes :

- (1)  $X = \bigcup_{x \in S_k} V_k(x)$  pour chaque  $k \geq 0$ ,
- (2) pour chaque  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ ,  $V_k(x)$  est compact et  $1/2 \cdot B_k(x) \subset V_k(x) \subset B_k(x)$ .

On remarque que les boules  $\{1/2 \cdot B_k(x)\}$  sont deux à deux disjointes. À partir de  $\mathcal{V}$  on définit pour chaque  $k \geq 0$  une partition  $\{T_k(x)\}_{x \in S_k}$  de  $S_{k+1}$  de la façon suivante : si  $y \in S_{k+1}$ , on associe à  $y$  un point  $x \in S_k$ , qui est un point tel que  $V_k(x)$  contient  $y$ . S'il y en a plusieurs, on en choisit un quelconque. D'après le point 2 ci-dessus on a

$$S_{k+1} \cap B\left(x, \frac{a^{-k}}{2}\right) \subset T_k(x) \subset S_{k+1} \cap B(x, a^{-k}).$$

On dit que les éléments  $y \in T_k(x)$  sont descendants de  $x \in S_k$ , et que  $x$  est le parent de  $T_k(x)$ . Notez que pour tous  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ , le cardinal de  $T_k(x)$  est plus petit ou égal à  $C_D(a^{-1})$ , constante qui dépend seulement de  $a$  et de la constante de doublement. Aussi comme  $X$  est uniformément parfait, pour toute constante  $N \in \mathbb{N}$ , on peut choisir  $a$  suffisamment grand, qui dépend seulement de la constante  $C_P$ , de sorte que  $|T_k(x)| \geq N$  pour tout  $k$  et  $x \in S_k$ .

On définit la généalogie d'un point  $x \in S$  comme

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S_0 \\ (y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) & \text{si } x \in S_{k+1}, k \geq 0 \end{cases}$$

où  $y_{k+1} = x$  et  $y_j \in S_j$  est le parent de  $y_{j+1} \in S_{j+1}$  pour  $j = 0, \dots, k$ . Soit  $x \in S_k$ , on désigne par  $D_k(x)$  les points de  $S$  qui sont descendants de  $x$ . C'est-à-dire

$$D_k(x) = \{y \in S_l : l \geq k+1, g(y)_k = x\}.$$

On note aussi  $D_{k+l}(x) := D_k(x) \cap S_{k+l}$  ( $l \geq 1$ ) les descendants de  $x$  de la génération  $k+l$ . La généalogie  $\mathcal{V}$  détermine un arbre maximal de  $G$ , où  $e = (x, y)$  est une arête de cet arbre si  $x$  ou  $y$  est un parent de l'autre.

**1.3. Les constantes et quelques propriétés du graphe.** Pour des raisons techniques le paramètre  $\lambda$  doit être suffisamment grand. On fixe  $\lambda \geq 15$  et on le pense comme étant une constante de plus. Une fois  $\lambda$  fixé, on peut choisir le paramètre  $a$  librement, avec la seule condition

$$a \geq a_0 := 3 \max\{\lambda, C_P\}. \quad (3.1.4)$$

L'inégalité (3.1.4) assure que certaines conditions, qui apparaissent de manière naturelle dans les calculs postérieurs, soient vérifiées et garantissent quelques propriétés géométriques du graphe  $G$  et de la généalogie. Dans le lemme suivant on énumère quelques propriétés de la généalogie et du graphe  $G$  qui nous seront utiles dans la suite, et qui montrent comment intervient la relation (3.1.4) dans les propriétés géométriques de  $G$ . Le lecteur peut sauter ce lemme et consulter les points nécessaires au moment où ces propriétés sont citées.

LEMME 3.2. On note  $\tau = \frac{a}{a-1}$ , et  $\epsilon_k = \frac{a^{-k+1}}{a-1} = \tau a^{-k}$ .

(i) Soient  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ . Alors

$$\bigcup_{l \geq k+1} S_l \cap B\left(x, \frac{a^{-k}}{3}\right) \subset D_k(x) \subset B\left(x, \tau a^{-k}\right). \quad (3.1.5)$$

(ii) Soient  $z \in X$ ,  $r > 0$ , et  $k \geq 1$  tels que  $a^{-k} \leq r$ . Si  $x \in S_{k+1}$  est tel que  $d(z, x) < a^{-(k+1)}$ , alors on a

$$D_{k+1}(x) \subset B\left(z, \frac{r}{2}\right). \quad (3.1.6)$$

(iii) Si  $y \in S_n$  et  $z \in X$  sont tels que  $d(z, y) \geq r + 2a^{-n}$ , alors

$$D_n(y) \cap B(z, r) = \emptyset. \quad (3.1.7)$$

(iv) Soient  $x, y \in S_{k+1}$  tels que  $d(x, y) \leq 4a^{-k}$ . Si  $x', y' \in S_k$  sont tels que  $d(x', x) \leq 2a^{-k}$  et  $d(y', y) \leq 2a^{-k}$ , alors  $x'$  et  $y'$  sont voisins.

(v) Soient  $x \in S_{k+1}$  et  $y, x' \in S_k$  tels que  $x \sim y$  et  $x'$  est le parent de  $x$ , alors  $x' \sim y$ .

(vi) Pour tout  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$  le cardinal de  $T_k(x)$  est au moins deux.

(vii) Pour tout  $x \in S_k$  avec  $k \geq 0$ , les voisins de  $x$  dans  $S_{k+1}$  appartiennent à  $T_k(x)$ .

DÉMONSTRATION. (i) Si  $x \in S_k$  et  $y \in D_k(x) \cap S_l$  avec  $l \geq k+1$ , alors

$$d(x, y) \leq \sum_{i=k}^{l-1} d(g(y)_i, g(y)_{i+1}) \leq \sum_{i=k}^{l-1} a^{-i} \leq \frac{a^{-k+1}}{a-1} = \epsilon_k.$$

Donc  $D_k(x) \subset B(x, \epsilon_k)$  si  $x \in S_k$ . De manière analogue, si  $d(x, y) < \frac{a^{-k}}{3}$ , avec  $y \in S_l$ ,  $x \in S_k$  et  $l > k$  alors  $y \in D_k(x)$ . En effet, soit  $z = g(y)_{k+1}$ , alors

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \epsilon_{k+1} + \frac{a^{-k}}{3} = a^{-k} \left( \frac{\tau}{a} + \frac{1}{3} \right) < \frac{a^{-k}}{2},$$

d'après (3.1.4). Et donc  $z \in D_k(x) \cap S_{k+1}$ , ce qui implique  $y \in D_k(x)$ .

(ii) On voit que si  $y \in D_{k+1}(x)$  alors

$$\begin{aligned} d(z, y) &\leq d(z, x) + d(x, y) < a^{-(k+1)} + \epsilon_{k+1} \\ &= a^{-k} \left( \frac{1}{a} + \frac{\tau}{a} \right) < r \left( \frac{1+\tau}{a} \right) < \frac{r}{2}, \end{aligned}$$

d'après (3.1.4). Si en particulier on prend  $z = x \in S_k \subset S_{k+1}$  et  $r = a^{-k}$ , l'inclusion (3.1.6) implique  $D_{k+1}(x) \subset B_k(x)$ .

(iii) Comme  $D_n(y) \subset B(y, \epsilon_n)$ , on a

$$d(z, D_n(y)) \geq r + 2a^{-n} - \epsilon_n > r,$$

car  $\tau < 2$  d'après la choix de  $a$  (voir (3.1.4)).

(iv) Comme  $d(x, y) \leq 4a^{-k}$  on a

$$d(x', y') \leq 8a^{-k} \leq \lambda a^{-k},$$

où la dernière inégalité est vraie d'après (3.1.4). Donc  $x' \sim y'$ .

(v) Soit  $w \in \lambda \cdot B_{k+1}(x)$ . Alors

$$d(w, x') \leq d(w, x) + d(x', x) \leq \lambda a^{-(k+1)} + a^{-k} = \left( \frac{\lambda}{a} + 1 \right) a^{-k} < \lambda a^{-k},$$

d'après (3.1.4). Donc  $\lambda B_{k+1}(x) \subset \lambda B_k(x')$ , qui implique  $\lambda B_k(y) \cap \lambda B_k(x') \neq \emptyset$  et donc  $x' \sim y$ .

(vi) Soit  $x \in S_k$  et  $k \geq 0$ . On sait que  $1/2 \cdot B_k(x) \cap S_{k+1} \subset T_k(x)$ , et que  $x \in T_k(x)$  car  $S_k \subset S_{k+1}$ . Comme  $X$  est uniformément parfait il existe  $y \in 1/3 \cdot B_k(x)$  tel que  $d(y, x) \geq (3C_P)^{-1} a^{-k}$ . Donc si  $z \in S_{k+1}$  est tel que  $y \in B_{k+1}(z)$  on a

$$0 < \left( \frac{1}{3C_P} - \frac{1}{a} \right) a^{-k} \leq d(z, x) \leq \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{3} \right) a^{-k} \leq \frac{1}{2} a^{-k}.$$

Donc  $z$  est un point différent de  $x$  qui appartient à  $T_k(x)$ .

(vii) En effet, si  $y \sim x$  en  $S_{k+1}$  on a  $d(y, x) \leq 2\lambda a^{-(k+1)} \leq 1/2 a^{-k}$ .

□



## 2. Caractérisation de la jauge conforme

**2.1. Enoncé du théorème.** Le but de cette section est de montrer le Théorème 3.3. Pour énoncer le théorème on a besoin des notations suivantes. Etant donnée une suite de fonctions  $\{\rho_k : S_k \rightarrow (0, +\infty)\}_{k \geq 1}$ , on pose  $\rho_0(x) = 1$  pour le seul  $x \in S_0$  et on note

$$\pi_k(x) := \prod_{i=0}^k \rho_i(g(x)_i), \quad \text{pour } x \in S_k.$$

Si  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^N$  est un chemin d'arêtes dans  $G$  (ou une courbe qui joint deux sommets de  $G$ ), avec  $z_i$  représentant le sommet  $B_{k_i}(z_i) \in \mathcal{S}_{k_i}$ , on définit

$$L_\rho(\gamma) := \sum_{i=1}^N \pi_{k_i}(z_i).$$

Soient  $x, y \in X$  et  $m \in \mathbb{N}$  maximal tel qu'il existe  $z \in S_m$  avec  $x, y \in \alpha B_m(z)$ , où  $\alpha > 1$ . On note

$$c_\alpha(x, y) := \{z \in S_m : x, y \in \alpha B_m(z)\},$$

et on l'appelle «le centre» de  $x$  et  $y$ . On remarque que si  $m = |c(x, y)|$ , alors par maximalité de  $m$  et le fait que  $\mathcal{S}_k$  est un recouvrement, on a

$$(\alpha - 1) a^{-(m+1)} \leq d(x, y) \leq 2\alpha a^{-m}.$$

On définit  $\pi(c_\alpha(x, y))$  comme étant le maximum de  $\pi_m(z)$  pour  $z \in c_\alpha(x, y)$ .

**THÉORÈME 3.3** (Caractérisation de la jauge). *Soit  $X$  un espace compact, doublant et uniformément parfait. Soit  $\{\mathcal{V}_k\}$  la généalogie définit en (3.1.3) avec  $a$  et  $\lambda$  qui vérifient (3.1.4). On suppose qu'il existe  $p > 0$  et une suite de fonctions  $\rho_k : S_k \rightarrow (0, +\infty)$ , qui vérifient les hypothèses suivantes :*

(H1) *Il existe  $0 < \eta_- \leq \eta_+ < 1$  tels que  $\eta_- \leq \rho_k \leq \eta_+$  pour tout  $k \geq 1$ .*

(H2) *Il existe une constante  $C_0 \geq 1$  telle que pour tout  $k \geq 1$  et  $x, y \in S_k$  avec  $x \sim y$  on a*

$$\frac{\pi_k(x)}{\pi_k(y)} \leq C_0.$$

(H3) *Il existe  $\alpha \in [2, \lambda/4]$  et une constante  $C_1 \geq 1$  tels que : pour tous  $x, y \in X$ , il existe  $k_0 \geq 1$  tel que pour  $k \geq k_0$  et toute courbe  $\gamma$  de  $G$  qui joint  $x_k$  et  $y_k$ , avec  $x_k, y_k \in S_k$  tels que  $x \in B_k(x_k)$  et  $y \in B_k(y_k)$ , on a*

$$L_\rho(\gamma) \geq \frac{1}{C_1} \cdot \pi(c_\alpha(x, y)).$$

(H4) Il existe une constante  $K_0 \geq 1$  telle que pour tous  $k \geq 0$ ,  $l \geq 1$  et  $x \in S_k$ ,

$$\frac{1}{K_0} \cdot \pi_k(x)^p \leq \sum_{y \in D_{k+l}(x)} \pi_{k+l}(y)^p \leq K_0 \cdot \pi_k(x)^p.$$

Alors il existe une distance  $\theta$  sur  $X$  quasisymétriquement équivalente à  $d$  et Ahlfors régulière de dimension  $p$ . De plus, la fonction de distorsion de  $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, \theta)$  dépend seulement de  $\eta_-$ ,  $\eta_+$ ,  $C_0$  et  $C_1$ ; et  $\theta(x, y) \asymp \pi(c_\alpha(x, y))$  pour tous  $x, y \in X$ .

Réciproquement, toute distance dans la jauge est bi-Lipschitz équivalente à une distance construite de cette façon.

La preuve du sens direct est faite en plusieurs étapes. La première étape (Lemme 3.4) consiste à trouver un sous-graphe  $G_1$  de  $G$  avec une distance  $|\cdot|_\rho$ , de sorte que  $(G_1, |\cdot|_\rho)$  soit quasi-isométrique à  $G$ , et  $|x|_\rho = \log \pi_k(x)^{-1}$  pour tout  $x \in S_k$ . C'est ici où on utilise les hypothèses (H1) et (H2) qui nous permettront de contrôler la longueur des courbes verticales dans  $G_1$  ainsi que le produit de Gromov dans la nouvelle métrique.

On rappelle (voir [CDP90] et [GH90]) qu'une *quasi-isométrie* entre deux espaces métriques est une application  $f : (Z_1, |\cdot|_1) \rightarrow (Z_2, |\cdot|_2)$  qui vérifie la propriété suivante : il existe des constantes  $\Lambda \geq 1$  et  $c \geq 0$  telles que

(i) pour tous  $x, y \in Z_1$ ,

$$\frac{1}{\Lambda} |x - y|_1 - c \leq |f(x) - f(y)|_2 \leq \Lambda |x - y|_1 + c,$$

(ii) et pour tout  $z \in Z_2$  il existe  $x \in Z_1$  tel que  $|f(x) - z|_2 \leq c$ .

Plus important pour nous est le fait qu'une quasi-isométrie  $f : (Z_1, |\cdot|_1) \rightarrow (Z_2, |\cdot|_2)$  induit un homéomorphisme quasisymétrique  $\hat{f} : \partial Z_1 \rightarrow \partial Z_2$  entre les bords, quand on munit chaque  $\partial Z_i$ ,  $i = 1, 2$  d'une métrique visuelle, et donc elle préserve la jauge canonique du bord. Voir la Proposition 6.7 de la Section 3 du Chapitre 6 pour un énoncé plus précis de cette propriété.

La deuxième étape consiste à montrer l'existence d'une métrique visuelle  $\theta$  du bord de  $(G_1, |\cdot|_\rho)$ , de paramètre visuel suffisamment grand (Proposition 3.5). C'est ici principalement, où on utilise l'hypothèse (H3). Comme  $\theta$  est une métrique visuelle, on a automatiquement  $\theta \in \mathcal{J}_d$ . Finalement le contrôle du paramètre visuel et l'hypothèse (H4) permettent de montrer que la mesure de Hausdorff de dimension  $p$  est Ahlfors régulière (Proposition 3.9).

**2.2. La démonstration de la réciproque.** On commence par prouver la réciproque du théorème car cela permettra de mieux comprendre la signification des hypothèses.

DÉMONSTRATION DE LA RÉCIPROQUE. Soit  $d' \in \mathcal{J}(X, d)$  Ahlfors régulière de dimension  $p > 0$ , et soit  $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  la fonction de distorsion de  $id : (X, d) \rightarrow (X, d')$ . On note aussi  $\text{diam}'$  le diamètre pour la distance  $d'$  et  $\mu$  la mesure de Hausdorff de dimension  $p$ . Pour  $k \geq 1$  et  $x \in S_k$ , si on note  $x' = g_{k-1}(x)$ , on définit

$$\rho_k(x) := \left( \frac{\mu(\lambda B_k(x))}{\mu(\lambda B_{k-1}(x'))} \right)^{1/p}.$$

Donc avec cette définition on a  $\pi_k(x) = \mu(\lambda B_k(x))^{1/p}$ . On commence par quelques remarques de caractère général. Soient  $\tau \geq 1$ ,  $r > 0$  et  $x \in X$ , alors il existe  $s > 0$  tel que si on note  $B'$  la boule pour la distance  $d'$  centrée en  $x$  et de rayon  $s$ , alors  $B' \subset B(x, r) \subset \tau B(x, r) \subset H_\tau \cdot B'$ , où  $H_\tau = \eta(\tau)$ . Donc il existe une constante  $K_\tau$ , qui dépend seulement de  $H_\tau$  et de la constante  $C_P$ , telle que

$$1 \leq \frac{\text{diam}' \tau B(x, r)}{\text{diam}' B(x, r)} \leq K_\tau.$$

En particulier, cela implique aussi (en prenant  $\tau = 1$ ) qu'il existe une constante  $K$ , qui dépend seulement de  $p$ , de  $H_1$  et de la constante de régularité de  $\mu$ , telle que

$$K^{-1} \cdot \text{diam}' B(x, r)^p \leq \mu(B(x, r)) \leq K \cdot \text{diam}' B(x, r)^p.$$

Premièrement on vérifie (H1) : soient  $k \geq 1$  et  $x \in S_k$ , on note  $B_k$  et  $B_{k-1}$  les boules  $B_k(x)$  et  $B_{k-1}(x')$  respectivement. On a  $\lambda B_k \subset 2B_{k-1}$ . Comme  $X$  est uniformément parfait de constante  $C_P$ , on sait que  $A_{k-1} := (2C_P \cdot B_{k-1}) \setminus 2B_{k-1} \neq \emptyset$ , et donc il existe  $y \in S_k$  tel que  $B_k(y) \cap A_{k-1} \neq \emptyset$ . On a  $\lambda B_k \cap B_k(y) = \emptyset$  et  $B_k(y) \subset \lambda B_{k-1}$  d'après le choix de  $a$  et  $\lambda$  (voir (3.1.4)). Comme  $\mu(\lambda B_k) + \mu(B_k(y)) \leq \mu(\lambda B_{k-1})$  on obtient

$$\frac{\mu(\lambda B_k)}{\mu(\lambda B_{k-1})} \leq 1 - \frac{\mu(B_k(y))}{\mu(\lambda B_{k-1})}.$$

D'un autre côté on a

$$\frac{\mu(B_k(y))}{\mu(\lambda B_{k-1})} \geq \frac{1}{K^2} \frac{\text{diam}' B_k(y)^p}{(\text{diam}' \lambda B_{k-1})^p} \geq \frac{1}{2K^2 \cdot \eta(2\lambda C_P a)^p} := \delta.$$

Donc il suffit de prendre  $\eta_+ = 1 - \delta^{1/p}$ . De manière analogue on a

$$\rho_k(x) \geq \frac{1}{2K^{2/p}} \cdot \eta \left( \frac{\text{diam}' \lambda B_{k-1}}{\text{diam}' \lambda B_k} \right)^{-1} \geq \frac{1}{2K^{2/p}} \cdot \eta \left( \frac{2a}{C_P} \right)^{-1} := \eta_-.$$

Pour (H2), on voit que si  $x, y \in S_k$  sont voisins alors  $\lambda B_k(y) \subset 3\lambda B_k(x)$ , et donc il existe une constante  $C_0$  qui dépend seulement de  $\eta$ , de  $K$  et de  $p$  telle que

$$\frac{\pi_k(x)}{\pi_k(y)} = \left( \frac{\mu(\lambda B_k(x))}{\mu(\lambda B_k(y))} \right)^{1/p} \leq K^{2/p} \frac{\text{diam}' \lambda B_k(x)}{\text{diam}' \lambda B_k(y)} \leq C_0.$$

On prend  $\alpha = 2$  et on regarde maintenant (H3). Soient  $x, y \in X$  et  $z \in c_2(x, y)$ , et posons  $m = |c_2(x, y)|$ . Donc on a

$$\frac{d'(x, y)}{\text{diam}' \lambda B_m(z)} \geq \frac{1}{2} \cdot \eta \left( \frac{\text{diam} \lambda B_m(z)}{d(x, y)} \right)^{-1} \geq \frac{1}{2} \cdot \eta (2\lambda a)^{-1}.$$

Et donc il existe une constante  $K'$ , qui dépend seulement de  $K$  et de  $a$  telle que

$$d'(x, y) \geq \frac{1}{K'} \cdot \pi_m(z).$$

D'un autre côté, si  $x_k, y_k \in S_k$  sont tels que  $x \in B_k(x_k)$  et  $y \in B_k(y_k)$  respectivement, avec  $k \geq m$  et  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^N$  est une courbe de  $G$  avec  $z_1 = x_k$  et  $z_N = y_k$ , on a

$$d'(x, y) \leq \sum_{i=1}^N \text{diam}' \lambda B_{k_i}(z_i) \leq K^{1/p} \sum_{i=1}^N \pi_{k_i}(z_i).$$

Alors on obtient (H3) avec  $C_1 = (K' K^{1/p})^{-1}$ .

Finalement on regarde (H4). Soient  $k \geq 0$ ,  $l \geq 1$  et  $x \in S_k$ . Comme la réunion des boules  $\lambda B_{k+l}(y)$ , avec  $y \in D_{k+l}(x)$ , contient  $1/3 \cdot B_k(x)$  on a

$$\mu(1/3 \cdot B_k(x)) \leq \sum_{y \in D_{k+l}(x)} \pi_{k+l}(y)^p.$$

On rappelle que les boules  $\{1/2 \cdot B_{k+l}(y) : y \in D_{k+l}(x)\}$  sont deux à deux disjointes. Alors il existe une constante  $K''$ , qui dépend seulement de  $H_{2\lambda}$  et de  $K$ , telle que

$$\sum_{y \in D_{k+l}(x)} \pi_{k+l}(y)^p \leq K'' \sum_{y \in D_{k+l}(x)} \mu(1/2 \cdot B_{k+l}(y)) \leq \mu(2B_k(x))$$

Cela montre (H4), avec une constante  $K_0$  qui dépend de  $\lambda$ . De plus, la preuve de (H3) montre que pour tous  $x, y \in X$  on a

$$\pi(c_2(x, y)) \asymp d'(x, y),$$

où les constantes de comparaison dépend de  $a$  et  $\lambda$ . La distance  $\theta$  construite en utilisant les fonctions  $\{\rho_k\}$  est aussi bi-Lipschitz à  $\pi(c_2(x, y))$ , et donc  $d$  est bi-Lipschitz équivalente à  $\theta$ .

□

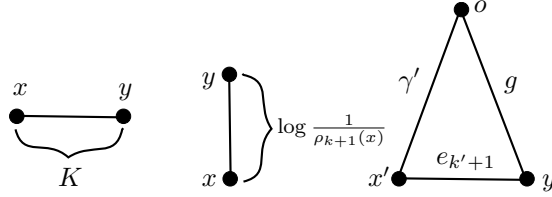


FIGURE 3.3. Démonstration du Lemme 3.4.

**2.3. La démonstration du sens direct.** On commence par simplifier l'espace  $G$  en prenant un sous-graphe avec moins d'arêtes verticales, sur lequel il sera plus facile de contrôler la longueur des courbes verticales, tout en restant dans la même classe de quasi-isométrie.

Soit  $G_1$  le sous-graphe de  $G$  tel que  $V(G_1) = V(G)$ , et tel que l'arête  $e = (x, y)$  de  $G$  est aussi une arête de  $G_1$  si et seulement si, ou bien  $e$  est une arête horizontale ou bien  $e$  appartient à l'arbre maximal donné par la généalogie  $\{\mathcal{V}_k\}$ , c'est-à-dire  $x$  ou  $y$  est le parent de l'autre. De cette façon  $G_1$  est connexe, et on met sur  $G_1$  la distance de longueur où les arêtes ont toutes longueur égale à 1. On obtient ainsi une distance géodésique, qu'on note  $|\cdot|_1$ , où l'inclusion  $G_1 \hookrightarrow G$  est cobornée, car tous les sommets appartiennent à  $G_1$ . On a aussi  $|\cdot| \leq |\cdot|_1$ .

Soit  $e = (x, y)$  une arête de  $G$  qui n'appartient pas à  $G_1$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $x \in S_{k+1}$  et  $y \in S_k$ . D'après le point (v) du Lemme 3.2, si  $x' \in S_k$  est le parent de  $x$ , alors  $e' = (x', y)$  est une arête horizontale de  $G$ , et donc de  $G_1$ . Et cela implique que pour tout chemin d'arêtes  $\gamma$  dans  $G$  il existe un chemin d'arêtes  $\gamma_1$  dans  $G_1$  avec  $\ell_1(\gamma_1) \leq 2\ell(\gamma)$ . C'est-à-dire,  $|\cdot|_1 \leq 2|\cdot| + 2$ , et donc  $G_1$  est quasi-isométrique à  $G$ .

**LEMME 3.4.** *Il existe une distance  $|\cdot|_\rho$  sur  $G_1$  bi-Lipschitz équivalente à  $|\cdot|_1$  avec la propriété suivante : tout chemin vertical d'arêtes dans  $G_1$ , qui joint  $x \in S_k$  et  $y \in S_l$ , est aussi une géodésique pour  $|\cdot|_\rho$  et sa longueur est égale à  $\left| \log \frac{1}{\pi_k(x)} - \log \frac{1}{\pi_l(y)} \right|$ . En particulier, pour tout  $x \in S_k$  on a  $|x - o|_\rho = \log \frac{1}{\pi_k(x)}$ . On note  $G_\rho$  le graphe  $G_1$  avec la distance  $|\cdot|_\rho$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par (H2) il existe une constante  $C_0 \geq 1$  telle que si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $S_k$  et  $x \sim y$  alors

$$\frac{1}{C_0} \leq \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(y)} \leq C_0. \quad (3.2.1)$$

On pose  $K = 2 \max \{-\log \eta_-, -(\log \eta_+)^{-1}, \log C_0\} > 0$ . Soit  $|\cdot|_\rho$  la distance de longueur sur  $G_1$  telle que la longueur d'une arête  $e = (x, y)$  est donnée par

$$\ell_\rho(e) = \begin{cases} K & \text{si } e \text{ est horizontale,} \\ \log \frac{1}{\rho_{k+1}(x)} & \text{si } x \in S_{k+1} \text{ et } y = g(x)_k. \end{cases}$$

Comme  $\frac{1}{K} \leq \ell_\rho(e) \leq K$  pour toute arête  $e$  de  $G_1$  (on utilise (H1) ici aussi), on a  $|\cdot|_\rho$  bi-Lipschitz équivalente à  $|\cdot|_1$ . Pour finir il suffit de montrer que si  $\gamma$  est une géodésique pour  $|\cdot|_\rho$  qui joint  $o$  et  $x \in S_k$ , alors  $\gamma$  est un chemin d'arêtes verticales.

Supposons que  $\gamma = \{e_i\}_{i=1}^N$  et qu'il existe un premier  $k' \geq 1$  tel que  $e_{k'+1} = (x', y)$  est une arête horizontale. On note  $\gamma' = \{e_i\}_{i=1}^{k'+1}$ , et on remarque que  $x', y \in S_{k'}$ . Soit  $g = \{g_i\}_{i=1}^{k'}$  le chemin d'arêtes verticales qui joint  $o$  et  $y$  où  $g_i = (g(y)_{i-1}, g(y)_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, k'$ . Alors  $\ell_\rho(g) = \log \frac{1}{\pi_{k'}(y)}$  et  $\ell_\rho(\gamma') = \log \frac{1}{\pi_{k'}(x')} + K$ . Comme  $x' \sim y$ , on a d'après (3.2.1)

$$\ell_\rho(g) = \log \frac{1}{\pi_{k'}(y)} \leq \log \frac{1}{\pi_{k'}(x')} + \frac{K}{2} < \ell_\rho(\gamma'),$$

qui est une contradiction car  $\gamma'$  est une géodésique pour  $|\cdot|_\rho$ .  $\square$

Comme  $G_\rho$  est un espace géodésique quasi-isométrique à  $G_1$ ,  $G_\rho$  est hyperbolique au sens de Gromov, son bord  $\partial G_\rho$  est homéomorphe à  $X$  et toute métrique visuelle sur  $\partial G_\rho$  est donc quasisymétriquement équivalente à la distance originale  $d$  de  $X$ . On identifie  $\partial G_\rho$  et  $X$ .

La proposition suivante nous permet de contrôler le paramètre visuel qui garantit l'existence des métriques visuelles sur  $\partial G_\rho$ . On note  $(x|y)_\rho$  pour  $x, y \in G_\rho$  le produit de Gromov pour la distance  $|\cdot|_\rho$ . Pour alléger les notations on note  $c(x, y)$ , où  $x, y \in X$ , à la place de  $c_\alpha(x, y)$ .

**PROPOSITION 3.5** (Contrôle du paramètre visuel). *Il existe une métrique visuelle  $\theta$  sur  $\partial G_\rho$  de paramètre visuel égal à 1. De plus, pour tous  $x, y \in X$  on a*

$$e^{-(x|y)_\rho} \asymp \pi(c(x, y)). \quad (3.2.2)$$

La preuve de la Proposition 3.5 est divisée en plusieurs lemmes. On rappelle (voir (3.1.2)) que pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $\phi_\varepsilon : G_1 \rightarrow (0, +\infty)$  donnée par  $\phi_\varepsilon(x) = \exp(-\varepsilon|x - o|_\rho)$ . On a la métrique  $d_\varepsilon$  sur  $G_1$  définie dans (3.1.1). On rappelle aussi que  $(G_1, d_\varepsilon)$  est un espace borné et non complet. On note aussi  $\rho_k^\varepsilon(x) = \rho_k(x)^\varepsilon$  et  $\pi_k^\varepsilon(x) = \pi_k(x)^\varepsilon$ .

On remarque que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1]$  la suite  $\rho^\varepsilon := \{\rho_k^\varepsilon\}_k$  vérifie les hypothèses (H1), (H2), et (H3) du Théorème 3.3, avec les constantes à la puissance  $\varepsilon$ , et qu'elle vérifie l'hypothèse (H4) avec  $p_\varepsilon := p/\varepsilon$ .

Dorénavant, on supposera toujours  $\varepsilon \in (0, 1]$ . On a besoin premièrement d'estimer la  $\varepsilon$ -longueur d'une arête  $e$  de  $G_1$ .

LEMME 3.6. *Soit  $e = (x, y)$  une arête de  $G_1$ , alors*

$$\ell_\varepsilon(e) \asymp \frac{\pi_k^\varepsilon(x) + \pi_k^\varepsilon(y)}{2}. \quad (3.2.3)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $e = (x, y)$  une arête de  $G_1$ . Comme  $1/K \leq \ell_\rho(e) \leq K$  et  $||z|_\rho - |y|_\rho| \leq K$ , alors

$$\pi_k^\varepsilon(y) \frac{1}{K} \exp(-\varepsilon K) \leq \int_e \exp(-\varepsilon |z|_\rho) ds \leq \pi_k^\varepsilon(y) K \exp(\varepsilon K).$$

Donc on a  $C_K^{-1} \pi_k^\varepsilon(y) \leq \ell_\varepsilon(e) \leq C_K \pi_k^\varepsilon(y)$ , où  $C_K$  est une constante qui dépend seulement de  $K$  et  $\varepsilon$ . De manière analogue on obtient  $\ell_\varepsilon(e) \asymp \pi_k^\varepsilon(x)$ . Cela implique (3.2.3).  $\square$

LEMME 3.7. *Soient  $x, y \in X$ , et soit  $m = |c(x, y)|$ . Alors pour tout  $k \geq m$  on a*

$$d_\varepsilon(x_k, y_k) \lesssim \pi^\varepsilon(c(x, y)), \quad (3.2.4)$$

où  $x_k, y_k \in S_k$  sont tels que  $x \in B_k(x_k)$  et  $y \in B_k(y_k)$  respectivement.

DÉMONSTRATION. Soient  $x_k$  et  $y_k$  comme dans l'énoncé, et soit  $z \in c(x, y)$ . On considère les segments géodésiques  $g_1 = [x_m, x_k]$  et  $g_2 = [y_m, y_k]$  où on note  $x_m = g(x_k)_m \in S_m$  et  $y_m = g(y_k)_m \in S_m$ . Alors on a

$$\begin{aligned} d(x_m, z) &\leq d(x_m, x_k) + d(x_k, x) + d(x, z) \\ &\leq (\tau + 1 + \alpha) a^{-m} \leq (3 + \lambda/2) a^{-m} \leq \lambda a^{-m}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (3.1.4). Donc  $e = (x_m, z)$  est une arête horizontale de  $G_1$ . De manière analogue  $(y_m, z)$  est une arête de  $G_1$ .

Soit  $\gamma$  la courbe de  $G_1$  qui joint  $x_k$  et  $y_k$  donnée par

$$\gamma := [x_k, x_m] * (x_m, z) * (z, y_m) * [y_m, y_k]. \quad (3.2.5)$$

On note aussi  $x_i = g(x_k)_i$  et  $y_i = g(y_k)_i$  pour  $i = m + 1, \dots, k - 1$ .

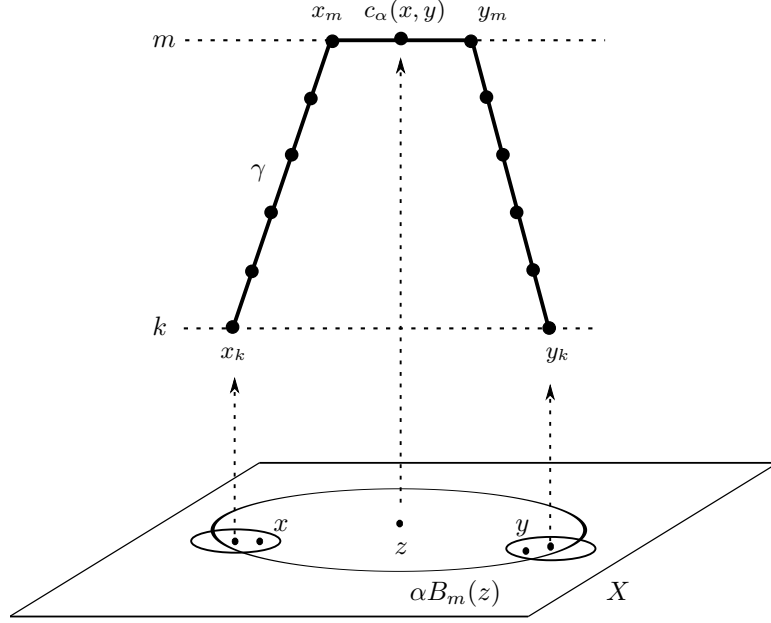


FIGURE 3.4. La courbe  $\gamma$  de  $G_\rho$  est minimisante pour la distance  $d_\varepsilon$  à une constante multiplicative près.

Alors d'après le Lemme 3.6 on peut majorer la  $\varepsilon$ -longueur de  $\gamma$  par

$$\begin{aligned}
 \ell_\varepsilon(\gamma) &\leq \ell_\varepsilon(g_1) + \ell_\varepsilon((x_m, z)) + \ell_\varepsilon((z, y_m)) + \ell_\varepsilon(g_2) \\
 &\leq C_K \cdot \left( \sum_{i=m}^{k-1} \pi_i(x_i)^\varepsilon + 2\pi_m(z)^\varepsilon + \sum_{i=m}^{k-1} \pi_i(y_i)^\varepsilon \right) \\
 &\leq C_K \cdot \left( \pi_i(x_m)^\varepsilon \cdot \sum_{i=m}^{k-1} (\eta_+^\varepsilon)^i + 2\pi_m(z)^\varepsilon + \pi_i(y_m)^\varepsilon \sum_{i=m}^{k-1} (\eta_+^\varepsilon)^i \right) \lesssim \pi_m(z)^\varepsilon,
 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (3.2.1). Cela implique (3.2.4).  $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.5. Soient  $x, y \in X$ , d'après (H3) et le Lemme 3.6, il existe  $k_0$  tel que si  $k \geq k_0$  et si  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$  est une courbe avec  $z_1 = x_k$  et  $z_N = y_k$ , où  $x_k, y_k \in S_k$  sont tels que  $x \in B_k(x_k)$  et  $y \in B_k(y_k)$ , alors

$$\ell_\varepsilon(\gamma) \gtrsim \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\pi_{k_i}^\varepsilon(z_i) + \pi_{k_{i+1}}^\varepsilon(z_{i+1})}{2} \geq \frac{1}{2} L_{\rho^\varepsilon}(\gamma) \geq \frac{1}{2C_1^\varepsilon} \cdot \pi^\varepsilon(c(x, y)).$$



Cela et le Lemme 3.7 impliquent que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1]$  le bord  $\partial_\varepsilon G_1$  est homéomorphe à  $X$ , et de plus on a pour tous  $x, y \in X$

$$d_\varepsilon(x, y) \asymp \pi(c(x, y))^\varepsilon,$$

où  $c(x, y)$  est le centre de  $x$  et  $y$  dans  $G_1$ . D'un autre côté on sait qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit qui dépend seulement de la constante d'hyperbolicité de  $G_\rho$ , tel que pour tout  $x, y \in X$  on a

$$d_{\varepsilon_0}(x, y) \asymp e^{-\varepsilon_0(x|y)_\rho}.$$

Mais donc pour  $\varepsilon = 1$  on obtient

$$d_1(x, y)^{\varepsilon_0} \asymp \pi(c(x, y))^{\varepsilon_0} \asymp d_{\varepsilon_0}(x, y) \asymp e^{-\varepsilon_0(x|y)_\rho}.$$

C'est-à-dire,  $\theta = d_1$  est une distance visuelle et en plus  $\pi(c(x, y)) \asymp e^{-(x|y)_\rho}$ . Cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

REMARQUE. Cette proposition peut être interprétée comme l'analogue du théorème de Gehring-Hayman pour les espaces Gromov-hyperboliques (voir Théorème 5.1 de [BHK01]). L'hypothèse (H2) est équivalente à une inégalité de type Harnack. Alors la proposition dit que les géodésiques de  $G_\rho$  sont minimisantes pour la distance  $d_\varepsilon$  à une constante multiplicative près. En effet, étant donnés  $x, y \in X$ , si  $k \geq m = |c(x, y)|$  et  $x_k, y_k \in S_k$  sont tels que  $x \in B_k(x)$  et  $y \in B_k(y_k)$ , alors la courbe  $\gamma = [x_k, x_m] * (x_m, z) * (z, y_m) * [y_m, y_k]$ , où  $z \in c(x, y)$  et  $x_m, y_m \in S_m$  sont les parents de  $x_k$  et  $y_k$  respectivement, a une  $\varepsilon$ -longueur comparable à  $\pi^\varepsilon(c(x, y))$ . Et donc cette courbe est minimisante à une constante multiplicative près (pour  $k \geq k_0$ ). L'importance ici tient du fait qu'on peut contrôler le paramètre  $\varepsilon$  grâce à l'hypothèse (H3). Voir la figure 3.4.

La troisième étape consiste à montrer que pour la distance  $\theta$ , la mesure de Hausdorff de dimension  $p$  est régulière. On va utiliser l'hypothèse (H4) pour construire une mesure  $\mu$  sur  $X$ , qui sera comparable à la mesure de Hausdorff de dimension  $p$ .

Soit  $\omega : S = \bigsqcup_{k \geq 0} S_k \rightarrow (0, +\infty)$  donnée par  $\omega_k(x) = \rho_k(x)^p$  si  $x \in S_k$ . On notera  $\omega_{k,x}$  au lieu de  $\omega_k(x)$ . Alors on peut définir une suite de mesures  $\mu_k$  par récurrence, purement atomiques avec des atomes sur  $S_k$ , en posant :  $\mu_0(x) = 1$  pour le seul  $x \in S_0$ , et

$$\mu_{k+1}(y) = \omega_{k+1,y} \mu_k(x)$$

pour  $y \in T_k(x)$  et  $x \in S_k$ . C'est-à-dire,  $\mu_k(x) = \pi_k(x)^p$  si  $x \in S_k$ , et si on note  $\delta_x$  la mesure de Dirac en  $x$ , on peut écrire

$$\mu_k = \sum_{x \in S_k} \pi_k(x)^p \delta_x.$$

On remarque que d'après (H4), pour tous  $k \geq 0$ ,  $x \in S_k$  et  $n \geq k$  on a

$$\frac{1}{K_0} \mu_k(x) \leq \mu_n(D_k(x)) \leq K_0 \mu_k(x).$$

En particulier, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $K_0^{-1} \leq \mu_n(X) \leq K_0$ . De plus, d'après (H1) et (H2) on a :

(i) Il existe une constante  $c \in (0, 1)$  telle que  $c \leq \omega_{k,x} \leq 1$  pour tous  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ .

(ii) Il existe une constante  $C'_0 = C_0^p \geq 1$  telle que si  $z, y \in S_n$  vérifient  $z \sim y$ , alors

$$\frac{\mu_n(z)}{\mu_n(y)} \leq C'_0. \quad (3.2.6)$$

Soit  $\mu$  un point limite quelconque de  $\mu_k$ . C'est-à-dire,  $\mu_{k_i}$  converge faiblement vers la mesure  $\mu$  sur  $X$ . Pour alléger la notation on enlève le sous-indice  $i$ .

LEMME 3.8. *Soient  $x, y \in X$  et  $r = d(x, y)$ . Alors*

$$\mu(B(x, r)) \asymp \pi(c(x, y))^p. \quad (3.2.7)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $m = |c(x, y)|$ , alors on a  $(\alpha - 1)a^{-(m+1)} < r \leq 2\alpha a^{-m}$ . Commençons par la borne inférieure. Comme  $\{B(z, a^{-(m+2)}) : z \in S_{m+2}\}$  est un recouvrement de  $X$ , il existe  $z_1 \in S_{m+2}$  tel que  $d(x, z_1) < a^{-(m+2)}$ . Pour alléger la notation, on note  $D(z_1) = D_{m+2}(z_1)$ . Comme  $a > 1$ , on a  $a^{-(m+2)} < r$ , et donc d'après l'inclusion (3.1.6) on a  $D(z_1) \subset B(x, \frac{r}{2})$ . Donc pour tout  $k \geq m+2$  on obtient

$$\mu_k\left(\overline{B}\left(x, \frac{r}{2}\right)\right) \geq \mu_k(D(z_1)) \geq K_0^{-1} \mu_{m+2}(z_1). \quad (3.2.8)$$

Soit  $y \in S_m$  tel que  $d(x, y) \geq r + 2a^{-m}$ . D'après la propriété (3.1.7), on a  $D_m(y) \cap B(x, r) = \emptyset$ . Cela implique que pour tout  $k \geq m$ , si  $z \in S_k \cap B(x, r)$  alors son parent  $g(z)_m$  de la génération  $m$  appartient à  $B(x, r + 2a^{-m})$ , et donc

$$\mu_k(B(x, r)) \leq K_0 \mu_m(B(x, r + 2a^{-m})). \quad (3.2.9)$$

En faisant  $k \rightarrow +\infty$  (dans la sous-suite  $k_i$ ), d'après (3.2.8) et (3.2.9) on conclut que

$$\mu(B(x, r)) \leq \liminf \mu_k(B(x, r)) \leq K_0 \mu_m(B(x, r + 2a^{-m})) \quad \text{et} \quad (3.2.10)$$

$$\mu(B(x, r)) \geq \mu\left(\overline{B}\left(x, \frac{r}{2}\right)\right) \geq \limsup \mu_k\left(\overline{B}\left(x, \frac{r}{2}\right)\right) \geq K_0^{-1} \mu_{m+2}(z_1). \quad (3.2.11)$$

Soit  $Q = S_m \cap B(x, r + 2a^{-m})$ , et soit  $z_2 = g(z_1)_m$ . D'une part, puisque  $\omega \geq c$  d'après (i), on a  $\mu_{m+2}(z_1) \geq c^2 \mu_m(z_2)$ . D'autre part, le cardinal de  $Q$  est borné par une constante uniforme  $M$  qui dépend seulement de la constante de doublement, et donc on a

$$\mu_m(B(x, r + 2a^{-m})) = \sum_{z \in Q} \mu_m(z) \leq M \max \{\mu_m(z) : z \in Q\}.$$

Il reste à comparer  $\mu_m(z)$  et  $\mu_m(z_2)$  pour tout  $z \in Q$ . Si  $z \in Q$ , alors

$$\begin{aligned} d(z, z_2) &\leq d(z, x) + d(x, z_1) + d(z_1, z_2) \leq r + 2a^{-m} + a^{-(m+2)} + \epsilon_m \\ &\leq (2\alpha + 3 + \tau) a^{-m} \leq \lambda a^{-m}, \end{aligned}$$

où les deux dernières inégalités sont vraies d'après (3.1.4). D'après le point (ii), il existe une constante  $C'_0 \geq 1$  telle que  $\mu_m(z) \leq C'_0 \mu_m(z_2)$  pour tout  $z \in Q$ . Donc on obtient

$$c^2 K_0^{-1} \mu_m(z_2) \leq K_0^{-1} \mu_{m+2}(z_1) \leq \mu(B(x, r)) \leq M \cdot C'_0 \cdot K_0 \cdot \mu_m(z_2). \quad (3.2.12)$$

Soit  $z_0 \in c(x, y)$ , alors  $d(z_2, z_0) \leq d(z_2, z_1) + d(z_1, x) + d(x, z_0) \leq \epsilon_m + a^{-(m+2)} + \alpha a^{-m} \leq \lambda a^{-m}$ , et donc  $z_2 \sim z_0$  (on rappelle que  $z_2 \sim z_0$  signifie que  $z_2$  et  $z_0$  sont les deux extrémités d'une arête horizontale). D'après (H2) on a

$$\pi_m(z_2)^p \asymp \pi_m(z_0)^p \asymp \pi(c(x, y))^p. \quad (3.2.13)$$

Finalement (3.2.12) et (3.2.13) impliquent (3.2.7).  $\square$

**PROPOSITION 3.9** (Ahlfors régularité). *La mesure de Hausdorff de dimension  $p$  pour la distance  $\theta$  de la Proposition 3.5 est régulière.*

**DÉMONSTRATION.** On montre que  $(X, \theta, \mu)$  est  $p$ -régulier. On note  $B_d$  et  $B_\theta$  les boules dans les métriques  $d$  et  $\theta$  respectivement. Soient  $x \in X$  et  $0 < r < 1$ , on prend  $y_0$  et  $y_1$  en  $X$  tels que

$$\begin{aligned} r_0 &= d(y_0, x) = \min \{d(w, x) : \theta(w, x) \geq r\}, \\ r_1 &= d(y_1, x) = \max \{d(w, x) : \theta(w, x) \leq r\}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$B_d(x, r_0) \subset B_\theta(x, r) \subset B_d(x, r_1).$$

Comme  $\theta(y_i, x)^p \asymp \pi(c(x, y_i))^p \asymp \mu(B_d(x, r_i))$  d'après (3.2.7) et  $\theta(y_1, x) \leq r \leq \theta(y_0, x)$ , on obtient

$$r^p \lesssim \pi(c(x, y_0))^p \asymp \mu(B_d(x, r_0)) \leq \mu(B_\theta(x, r)) \leq \mu(B_d(x, r_1)) \asymp \pi(c(x, y_1))^p \lesssim r^p.$$

Donc  $\mu(B_\theta(x, r)) \asymp r^p$ , cela prouve la proposition.  $\square$

### 3. Contrôle de la dimension et simplification des hypothèses

**3.1. Contrôle de la dimension.** Dans cette partie on modifie l'hypothèse (H3) du Théorème 3.3. Le but est d'énoncer une condition sur les longueurs des courbes horizontales, qui implique (H3). On a besoin de quelques notations.

Soit  $\{\rho_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}_+\}_{k \geq 1}$  une suite de fonctions de poids. On définit  $\rho_k^* : S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$\rho_k^*(z) = \min_{x \sim z \in S_k} \rho_k(x), \quad \text{pour } z \in S_k.$$

Soit  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$  un chemin d'arêtes de  $G$ , on dit que  $\gamma$  est un chemin horizontal de niveau  $k \geq 1$  si  $z_i \in S_k$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . Si  $\gamma$  est un chemin horizontal de niveau  $k$ , on définit

$$L(\gamma, \rho_k) = \sum_{j=1}^{N-1} \rho_k^*(z_j) \wedge \rho_k^*(z_{j+1}).$$

On note  $\Gamma_{k+1}(x)$  où  $x \in S_k$  et  $k \geq 0$ , la famille de chemins horizontaux de niveau  $k+1$ ,  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$ , tels que  $z_1 \in B_k(x)$ ,  $z_i \in 2 \cdot B_k(x)$  pour  $i = 2, \dots, N-1$  et  $z_N \in X \setminus 2 \cdot B_k(x)$ .

**THÉORÈME 3.10 (Contrôle de la dimension).** *Soit  $X$  un espace compact, doublant et uniformément parfait. Soit  $\{\mathcal{V}_k\}$  la généalogie définie en (3.1.3) avec  $a$  et  $\lambda$  qui vérifient (3.1.4). On suppose qu'il existe  $p > 0$  et une suite de fonctions  $\rho_k : S_k \rightarrow (0, +\infty)$ , qui vérifient les hypothèses (H1), (H2) et (H4) du Théorème 3.3, et aussi*

*(H3') Pour tout  $k \geq 0$  et tout  $x \in S_k$ , si  $\gamma \in \Gamma_{k+1}(x)$ , alors  $L(\gamma, \rho_{k+1}) \geq 1$ .*

*Alors il existe une distance  $\theta \in \mathcal{J}(X, d)$  Ahlfors régulière de dimension  $p$ . Par conséquent, la dimension conforme Ahlfors régulière de  $X$  est plus petite ou égale à  $p$ .*

Il s'agit de montrer que l'hypothèse (H3) est vérifiée. On divise la preuve en plusieurs lemmes. On commence par la remarque suivante : d'après le Lemme 3.6 on a  $\ell_1(\gamma) \asymp L_\rho(\gamma)$  (on note  $\ell_1$  la longueur  $\ell_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1$ ), et donc pour contrôler la longueur des courbes dans  $G_1$ , c'est-à-dire  $L_\rho(\gamma)$ , il suffit de travailler avec  $\ell_1$ . Pour des raisons techniques on modifie cette fonction de longueur  $\ell_1$  en la remplaçant par

une autre bi-Lipschitz équivalente. Pour  $k \geq 0$  on définit  $\pi_k^* : S_k \rightarrow (0, +\infty)$  en posant

$$\pi_k^*(x) = \min_{z \sim x \in S_k} \pi_k(z).$$

D'après (3.2.1) on a

$$\pi_k(x) \geq \pi_k^*(x) \geq \frac{1}{C_0} \pi_k(x) \quad \text{pour tout } x \in S_k. \quad (3.3.1)$$

Cela et (H1) impliquent que si  $y \in S_{k+1}$  et  $x = g(y)_k$  alors

$$\frac{1}{C_0} \pi_{k+1}^*(y) \leq \frac{1}{C_0} \pi_{k+1}(y) \leq \frac{1}{C_0} \pi_k(x) \leq \pi_k^*(x) \quad (3.3.2)$$

et

$$\pi_k^*(x) \leq \pi_k(x) \leq \frac{1}{\eta_-} \pi_{k+1}(y) \leq \frac{C_0}{\eta_-} \pi_{k+1}^*(y). \quad (3.3.3)$$

Soit  $e = (x, y)$  une arête de  $G_1$ , d'après le Lemme 3.6 est les inégalités (3.3.2) et (3.3.3), on a :

(1) si  $e$  est horizontale avec  $x, y \in S_k$ , alors

$$\ell_1(e) \asymp \frac{\pi_k(x) + \pi_k(y)}{2} \asymp \pi_k^*(x) \wedge \pi_k^*(y). \quad (3.3.4)$$

(2) et si  $e$  est verticale avec  $y \in S_k$  et  $x = g(y)_{k-1}$ , alors

$$\ell_1(e) \asymp \pi_k(y) \asymp \pi_k^*(y). \quad (3.3.5)$$

Soit  $C_1 = C_0/\eta_-$ . La modification de  $\ell_1$  consiste simplement à changer la longueur d'une arête de  $G_1$  en posant

$$\hat{\ell}_1(e) = \begin{cases} \pi_k^*(x) \wedge \pi_k^*(y), & \text{si } e = (x, y) \text{ est horizontale avec } x, y \in S_k. \\ C_1 \pi_k^*(y), & \text{si } e = (x, y) \text{ est verticale avec } y \in S_k \text{ et } x = g(y)_{k-1}. \end{cases}$$

D'après (3.3.4) et (3.3.5), les fonctions de longueur  $\ell_1$  et  $\hat{\ell}_1$  sont bi-Lipschitz équivalentes. On remarque en particulier que la distance de longueur induite par  $\hat{\ell}_1$ , est bi-Lipschitz équivalente à  $d_1$  ( $d_\varepsilon$  avec  $\varepsilon = 1$ ).

Le premier pas consiste à estimer la longueur  $\hat{\ell}_1(\gamma)$  de certaines courbes dans  $G_1$ . Le premier type de courbes, traité dans le lemme suivant, est celui des courbes horizontales qui ont un «diamètre» assez grand par rapport à l'échelle, c'est-à-dire les courbes qui vérifie l'énoncé de (H3').

LEMME 3.11. *Soient  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ . Si  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$  est un chemin horizontal de niveau  $k+1$ , tel que  $z_i \in B(x, 3a^{-k})$  pour tout  $i$ ,  $z_1 \in B(x, a^{-k})$  et*

$z_N \notin B(x, 2a^{-k})$ . On note  $z \in S_k$  le parent de  $z_1$ . Alors

$$\hat{\ell}_1(\gamma) = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_{k+1}^*(z_i) \wedge \pi_{k+1}^*(z_{i+1}) \geq \max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \}. \quad (3.3.6)$$

DÉMONSTRATION. On montre premièrement que pour tout  $j = 1, \dots, N$  on a

$$\pi_{k+1}^*(z_j) \geq \max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \} \rho_{k+1}^*(z_j). \quad (3.3.7)$$

Soit  $y \sim z_j \in S_{k+1}$  tel que  $\pi_{k+1}^*(z_j) = \pi_{k+1}(y)$ , et soit  $x' = g(y)_k$ . Alors

$$\begin{aligned} d(x, x') &\leq d(x, z_j) + d(z_j, y) + d(y, x') \leq 3a^{-k} + 2\lambda a^{-(k+1)} + a^{-k} \\ &= \left(4 + \frac{2\lambda}{a}\right) a^{-k} < \lambda a^{-k}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du choix fait en (3.1.4). Comme  $d(z, x) \leq 2a^{-k} \leq \lambda a^{-k}$ , on a aussi  $x \in \lambda B_k(z) \cap \lambda B_k(x')$ . Cela implique que  $x' \sim x$  et  $x' \sim z$ , et donc  $\max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \} \leq \pi_k(x')$ . Alors

$$\pi_{k+1}^*(z_j) = \pi_{k+1}(y) = \pi_k(x') \cdot \rho_{k+1}(y) \geq \max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \} \min_{y' \sim z_j \in S_{k+1}} \rho_{k+1}(y').$$

Cela montre (3.3.7). D'après  $(H3')$  on sait que  $L(\gamma, \rho_{k+1}) \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \pi_{k+1}^*(z_j) \wedge \pi_{k+1}^*(z_{j+1}) &\geq \sum_{j=1}^{N-1} \max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \} (\rho_{k+1}^*(z_j) \wedge \rho_{k+1}^*(z_{j+1})) \\ &= \max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \} L(\gamma, \rho_{k+1}) \geq \max \{ \pi_k^*(z), \pi_k^*(x) \}. \end{aligned}$$

□

Le deuxième type de courbes est l'ensemble des courbes qui malgré un «diamètre» petit, ont une arête verticale. Ce qui grâce à la définition de  $\hat{\ell}_1(e_v)$  pour  $e_v$  une arête verticale, nous permettra quand même d'estimer inférieurement leur longueur. Plus précisément, on a la propriété suivante : si  $e_v = (x, y)$  est une arête verticale avec  $y \in S_{k+1}$  et  $x = g(y)_k$ , et  $e_h = (x, z)$  est une arête horizontale, alors

$$\hat{\ell}_1(e_h) \leq \hat{\ell}_1(e_v). \quad (3.3.8)$$

En effet, par définition et d'après (3.3.3) on a  $\hat{\ell}_1(e_h) \leq \pi_k^*(x) \leq C_1 \pi_{k+1}^*(y) = \hat{\ell}_1(e_v)$ .

Soit  $\gamma = \{e_i = (x_i, x_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$  un chemin d'arêtes de  $G_1$ , on dit que  $\gamma$  est de niveau au plus  $k$  si  $|x_i| \leq k$  pour tout  $i$ .

LEMME 3.12. Soient  $y_1, y_2 \in S_{k+1}$  tels que  $4a^{-k} < d(y_1, y_2)$ . Soit  $\gamma = \{(x_j, x_{j+1})\}_{j=1}^{N-1}$  un chemin de niveau au plus  $k+1$  qui les joint. Alors il existe  $\gamma' = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N'-1}$  un chemin de niveau au plus  $k$  tel que :

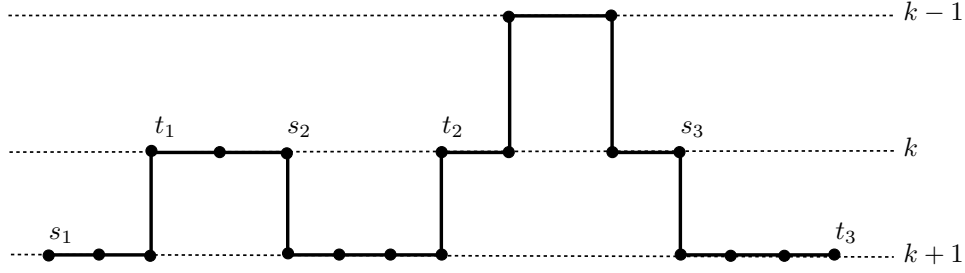


FIGURE 3.5. Démonstration du Lemme 3.12 : décomposition d'un chemin en sous-chemins  $\gamma_i$ .

- (1)  $z_1, z_{N'} \in S_k$  sont les parents de  $y_1$  et  $y_2$  respectivement, et  
 (2)  $\hat{\ell}_1(\gamma') \leq \hat{\ell}_1(\gamma)$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\gamma$  un tel chemin de niveau au plus  $k+1$ , avec  $x_1, x_N \in S_{k+1}$ . On peut décomposer  $\gamma$  en sous-chemins de niveau au plus  $k$  ou bien égal à  $k+1$ , de la façon suivante. Soit  $s_1 = 1$ , on définit par récurrence  $s_i$  et  $t_i$  entiers positifs comme suit :

$$t_i = \min \{j > s_i : |x_j| \leq k \text{ ou } j = N\},$$

$$s_{i+1} = \min \{j \geq t_i : |x_{j+1}| = k+1\}.$$

On s'arrête quand  $t_i = N$ , pour un certain  $i := M$ . Noter que  $|x_{s_1}| = |x_{t_M}| = k+1$ , et sinon pour les autres  $|x_{s_i}| = |x_{t_i}| = k$  (voir la figure 3.5). Comme on est en train de minimiser la longueur de  $\gamma$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\gamma$  est un chemin sans auto-intersections, et donc que  $x_{s_i} \neq x_{t_i}$  pour tout  $i$ .

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, M\}$  on note  $\gamma_i = \{(x_j, x_{j+1})\}_{j=s_i}^{t_i-1}$ , on va construire  $\gamma'_i$  de niveau au plus  $k$  tel que  $\hat{\ell}_1(\gamma'_i) \leq \hat{\ell}_1(\gamma_i)$ . On laisse les cas  $i = 1$  et  $i = M$  pour la fin.

On fixe  $i \in \{2, \dots, M-1\}$ , et on note  $z = x_{s_i}$ . On divise la construction en deux cas.

Premier cas :  $x_j \in B(z, 2a^{-k})$  pour tout  $j \in \{s_i + 1, \dots, t_i - 1\}$ .

Dans ce cas, comme  $x_{s_i}, x_{t_i} \in S_k$  sont les parents de  $x_{s_{i+1}}$  et  $x_{t_{i-1}}$  respectivement, et  $d(x_{s_{i+1}}, x_{t_{i-1}}) \leq 4a^{-k}$ , d'après (iv) du Lemme 3.2 on sait que  $e = (x_{s_i}, x_{t_i})$  est une arête de  $G_1$ . Donc on pose  $\gamma'_i = e$ . Comme l'arête  $e' = (x_{t_{i-1}}, x_{t_i})$  est verticale, d'après (3.3.8) on obtient

$$\hat{\ell}_1(\gamma'_i) = \hat{\ell}_1(e) \leq \hat{\ell}_1(e') \leq \hat{\ell}_1(\gamma_i).$$

Deuxième cas : Il existe  $j_1 \in \{s_i + 1, \dots, t_i - 1\}$  tel que  $x_{j_1} \notin B(z, 2a^{-k})$ .

On peut supposer que  $j_1$  est le premier avec cette propriété. Le chemin  $\{(x_j, x_{j+1})\}_{j=s_i+1}^{t_i-2}$  est de niveau égal à  $k+1$ . On décompose encore une fois ce chemin pour pouvoir utiliser l'estimation (3.3.6). On note  $j_0 = s_i + 1$  et  $z_0 = z$ . Supposons définis  $j_l$  et  $z_l$ , si  $j_l < t_i - 1$  on définit

$$j_{l+1} = \min \{j_l < j \leq t_i - 1 : x_j \notin B(z_l, 2a^{-k}) \text{ ou } j = t_i - 1\},$$

et soit  $z_{l+1} \in S_k$  le parent de  $x_{j_{l+1}}$ . En particulier, on a  $x_{j_{l+1}} \in B(z_{l+1}, a^{-k})$ . On obtient donc une suite  $\{j_0, \dots, j_{L_i}\} \subset \{s_i + 1, \dots, t_i - 1\}$  avec  $j_0 = s_i + 1$  et  $j_{L_i} = t_i - 1$ , et on appelle  $\sigma_l = \{(x_j, x_{j+1})\}_{j=j_l}^{j_{l+1}-1}$ .

Voyons que  $\sigma_l$  et  $z_l$  vérifient les hypothèses du Lemme 3.11 pour chaque  $l \in \{0, \dots, L_i - 2\}$ . On sait par construction que  $x_{j_{l+1}} \notin B(z_l, 2a^{-k})$  et que  $x_j \in B(z_l, 2a^{-k})$  pour tout  $j_l \leq j < j_{l+1}$ . De plus, comme

$$\begin{aligned} d(z_l, x_{j_{l+1}}) &\leq d(z_l, x_{j_{l+1}-1}) + d(x_{j_{l+1}-1}, x_{j_{l+1}}) \\ &\leq 2a^{-k} + 2\lambda a^{-(k+1)} = \left(2 + \frac{2\lambda}{a}\right) a^{-k} \leq 3a^{-k}, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

(la dernière inégalité découle du choix fait en (3.1.4)) on obtient

$$\{x_j\}_{j=j_l}^{j_{l+1}} \subset B(z_l, 3a^{-k}).$$

Donc d'après (3.3.6) on sait que pour  $l \in \{0, \dots, L_i - 2\}$ , on a

$$\pi_k^*(z_l) \leq \hat{\ell}_1(\sigma_l). \quad (3.3.10)$$

D'après (v) du Lemme 3.2, l'arête  $e_l = (z_l, z_{l+1})$  reste bien dans  $G_1$ , car on a l'arête  $(z_l, x_{j_{l+1}}) \in G$  et  $z_{l+1}$  est le parent de  $x_{j_{l+1}}$ . Comme pour  $l = L_i - 1$  on a  $x_{t_i-1} = x_{j_{L_i}} \in B(z_{L_i-1}, 2a^{-k})$ , on voit de manière analogue l'existence de l'arête  $e_{t_i} = (z_{L_i-1}, x_{t_i})$ . De plus, comme  $(x_{t_i-1}, x_{t_i})$  est une arête verticale, d'après (3.3.8) on a

$$\hat{\ell}_1(e_{t_i}) \leq \hat{\ell}_1((x_{t_i-1}, x_{t_i})). \quad (3.3.11)$$

Soit  $\gamma'_i = e_0 * \dots * e_{L_i-2} * e_{t_i}$ , alors  $\gamma'_i$  joint  $x_{s_i}$  et  $x_{t_i}$ . De plus, d'après (3.3.10) et (3.3.11), on a

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_1(\gamma'_i) &= \sum_{l=0}^{L_i-2} \hat{\ell}_1(e_l) + \hat{\ell}_1(e_{t_i}) \leq \sum_{l=0}^{L_i-2} \pi_k^*(z_l) + \hat{\ell}_1((x_{t_i-1}, x_{t_i})) \\ &\leq \sum_{l=0}^{L_i-2} \hat{\ell}_1(\sigma_l) + \hat{\ell}_1((x_{t_i-1}, x_{t_i})) \leq \hat{\ell}_1(\gamma_i). \end{aligned}$$

Considérons le cas  $i = 1$ , on fait une construction similaire à celle de ci-dessus. Soit  $z = w_1 \in S_k$  le parent de  $x_1$ , donc en particulier  $x_1 \in B(z, a^{-k})$ . De manière



analogue on divise la construction en deux cas. Supposons premièrement que  $x_j \in B(z, 2a^{-k})$  pour tout  $j \in \{1, \dots, t_1 - 1\}$ . Comme  $d(x_1, x_N) > 4a^{-k}$ , on sait que  $\gamma_1$  n'est pas tout le chemin  $\gamma$ . Donc  $(x_{t_1-1}, x_{t_1})$  est une arête verticale. Un argument analogue au précédent montre que  $e = (z, x_{t_1})$  est une arête de  $G_1$ , et que si on pose  $\gamma'_1 = e$ , on obtient  $\hat{\ell}_1(\gamma'_1) \leq \hat{\ell}_1(\gamma_1)$ . Si au contraire il existe  $j$  tel que  $x_j \notin B(z, 2a^{-k})$ , comme dans le deuxième cas ci-dessus, on construit  $\gamma'_1 = e_0 * \dots * e_{L_1-2} * e_{t_1}$ .

Aussi pour  $i = M$  on fait la même construction. Soit  $z = x_{s_M} \in S_k$ , et donc en particulier  $x_{s_M+1} \in B(z, a^{-k})$ . Si  $x_j \in B(z, 2a^{-k})$  pour tout  $j = s_M + 1, \dots, N$ , en utilisant le fait que  $(x_{s_M}, x_{s_M+1})$  est une arête verticale, on voit comme ci-dessus qu'il suffit de prendre  $\gamma'_M = (x_{s_M}, w_2)$  où  $w_2 \in S_k$  est le parent de  $x_N$ . Sinon, avec  $j_0 = s_M + 1$  et  $z_0 = z$ , on fait comme dans le deuxième cas ci-dessus et on obtient  $\gamma'_M = e_0 * \dots * e_{L_M-3} * (z_{L_M-2}, w_2)$  (si  $L_M \leq 2$  on veut dire  $(z_0, w_2)$ ). Il faut montrer l'existence de l'arête  $(z_{L_M-2}, w_2)$ , qui se fait de façon analogue aux autres.

Enfin, on remarque que dans le cas où  $M = 1$  (c'est-à-dire,  $\gamma = \gamma_1$  est un chemin de niveau  $k + 1$ ) on a  $s_1 = 1$  et  $t_1 = M$ . On définit de manière analogue  $j_0 = 1$  et  $z_0$  le parent de  $x_1$ . On définit aussi par récurrence

$$j_{l+1} := \min \{j_l < j \leq N : x_j \notin B(z_l, 2a^{-k}) \text{ ou } j = N\},$$

et  $z_{l+1}$  le parent de  $x_{j_{l+1}}$ . On obtient donc une suite  $\{j_0, \dots, j_L\} \subset \{1, \dots, N\}$  avec  $j_0 = 1$  et  $j_L = N$ , et on appelle  $\sigma_l = \{(x_j, x_{j+1})\}_{j=j_l}^{j_{l+1}-1}$ . On montre de la même façon que l'arête  $e_l = (z_l, z_{l+1})$  est bien dans  $G_1$ , comme aussi l'arête  $e = (z_{L-2}, z_L)$ . Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que si  $\gamma' = e_0 * \dots * e_{L-3} * e$  alors on a  $\hat{\ell}_1(\gamma') \leq \hat{\ell}_1(\gamma)$ .

En conclusion, dans les deux cas, pour  $i \neq 1, M$ , on obtient un chemin  $\gamma'_i$  de niveau au plus  $k$  qui joint  $x_{s_i}$  à  $x_{t_i}$  et de longueur plus petite ou égale à  $\hat{\ell}_1(\gamma_i)$ . Pour  $i = 1$  on obtient un tel chemin qui joint  $w_1 \in S_k$  (le parent de  $x_1$ ) à  $x_{t_1}$ . Et pour  $i = M$  on obtient un tel chemin qui joint  $x_{s_M}$  à  $w_2 \in S_k$ , le parent de  $x_N$ . Finalement si on note  $\zeta_i = \{(x_j, x_{j+1})\}_{j=t_i}^{s_{i+1}-1}$  pour  $i = 1, \dots, M - 1$ , il suffit de prendre

$$\gamma' = \gamma'_1 * \zeta_1 * \gamma'_2 * \dots * \zeta_{M-1} * \gamma'_M.$$

Cela finit la preuve du lemme. □

Dans l'énoncé de (H3), on prend  $\alpha = 8$ , et pour alléger les notations on note  $c(x, y)$  à la place de  $c_\alpha(x, y)$ .

LEMME 3.13. *Il existe une constante uniforme  $C \geq 1$  telle que pour tous  $x, y \in X$ , il existe  $k_0$  qui dépend de  $x$  et  $y$ , tel que si  $x_k, y_k \in S_k$  avec  $k \geq k_0$  sont tels que*

$x \in B_k(x_k)$  et  $y \in B_k(y_k)$ , alors pour tout chemin d'arêtes  $\gamma$  qui joint  $x_k$  et  $y_k$  on a

$$\hat{\ell}_1(\gamma) \geq \frac{1}{C} \cdot \pi(c(x, y)). \quad (3.3.12)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $m = |c(x, y)|$  le niveau du centre de  $x$  et  $y$ . On suppose  $k \geq m + 1$ . Par définition de  $m$  on voit que  $d(x, y) \geq 7a^{-(m+1)}$  et

$$d(x_k, y_k) \geq d(x, y) - 2a^{-k} \geq 5a^{-m+1}. \quad (3.3.13)$$

Soit  $\gamma$  un chemin d'arêtes qui joint  $x_k$  et  $y_k$ . La stratégie consiste à utiliser le Lemme 3.12 par récurrence pour trouver un chemin de niveau au plus  $m + 1$  de longueur plus petite que  $\gamma$ . On divise la preuve en deux cas.

Premier cas : le chemin  $\gamma$  est un chemin de niveau au plus  $k$ .

D'après (3.3.13) on peut appliquer le Lemme 3.12 au moins une fois. Posons  $\gamma_k = \gamma$ , et supposons construits les chemins  $\gamma_i$  pour  $i \in \{l, l+1, \dots, k\}$ , qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\gamma_i$  est de niveau au plus  $i$  et joint les points  $x_i, y_i \in S_i$ ,
- $x_i, y_i$  sont les parents de  $x_{i+1}, y_{i+1}$  respectivement, et
- $\hat{\ell}_1(\gamma_i) \leq \hat{\ell}_1(\gamma_{i+1})$ .

Alors (on rappelle que  $\tau = \frac{a}{a-1}$ )

$$d(x_l, y_l) \geq d(x_k, y_k) - 2 \sum_{i=l}^{k-1} a^{-i} \geq 5a^{-(m+1)} - 2\tau a^{-l}.$$

En utilisant (3.1.4), on a  $d(x_l, y_l) \geq 4a^{-(l-1)}$  si  $l \geq m + 2$ . Mais cela nous permet d'appliquer encore une fois le Lemme 3.12 pour obtenir  $\gamma_{l-1}$  pourvu que  $l \geq m + 2$ . En conclusion, on sait qu'il existe un chemin  $\gamma_{m+1}$  de niveau au plus  $m + 1$  qui joint  $x_{m+1}$  et  $y_{m+1}$ , les parents dans  $S_{m+1}$  de  $x_k$  et  $y_k$  respectivement, avec  $\hat{\ell}_1(\gamma_{m+1}) \leq \hat{\ell}_1(\gamma)$ . De plus, si  $x_m \in S_m$  est le parent de  $x_{m+1}$  on a

$$d(x_m, x) \leq \sum_{i=m}^{k-1} a^{-i} + a^{-k} \leq \tau a^{-m}. \quad (3.3.14)$$

Donc si  $z \in c(x, y)$ , le fait que  $d(z, x) \leq 8a^{-m}$  et (3.3.14) nous donnent que  $d(z, x_m) \leq \lambda a^{-m}$ . C'est-à-dire,  $e = (z, x_m)$  est une arête de  $G_1$ , et donc  $\pi_m(x_m) \geq C_0^{-1} \pi_m(z)$ . Finalement comme  $\hat{\ell}_1(\gamma_{m+1}) \geq C_0^{-2} \pi_{m+1}^*(x_{m+1}) \geq C_0^{-3} C_1^{-1} \pi_m(x_m)$ , on obtient

$$\hat{\ell}_1(\gamma) \geq \hat{\ell}_1(\gamma_m) \geq \frac{1}{C_0^4 C_1} \pi(c(x, y)). \quad (3.3.15)$$

Deuxième cas :  $\gamma$  est un chemin de niveau au moins  $k + 1$ .

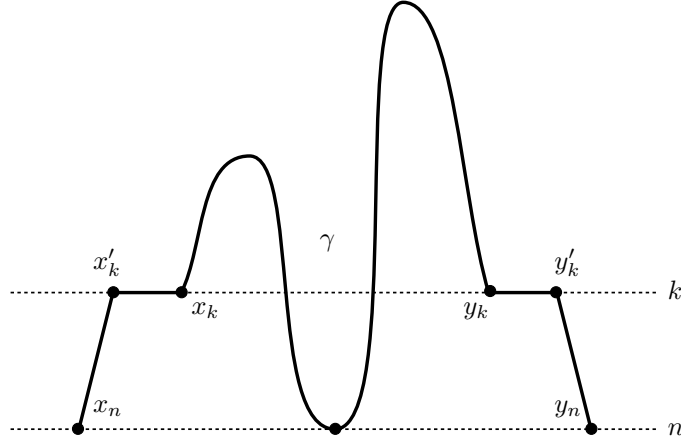


FIGURE 3.6. Démonstration du Lemme 3.13, deuxième cas.

Soit  $k_0$  suffisamment grand de sorte que

$$2C_1 \sum_{i=k_0}^{\infty} (\eta_+)^i \leq \frac{1}{2C_0^4 C_1} (\eta_-)^m, \quad (3.3.16)$$

et supposons  $k \geq k_0$ . Soit  $n > k$  le niveau maximal d'un sommet de  $\gamma$ , et soient  $x_n, y_n \in S_n$  tels que  $x \in B_n(x_n)$  et  $y \in B_n(y_n)$ . Posons  $x'_k = g(x_n)_k$  et  $y'_k = g(y_n)_k$ , et soient  $g_x = [x'_k, x_n]$  et  $g_y = [y'_k, y_n]$  les deux chemins géodésiques correspondants. Comme

$$d(x'_k, x_k) \leq d(x'_k, x_n) + d(x_n, x_k) \leq (\tau + 2)a^{-k} \leq \lambda a^{-k},$$

d'après (3.1.4),  $e_x = (x'_k, x_k)$  est une arête de  $G_1$ . De manière analogue on voit que  $e_y = (y_k, y'_k)$  est aussi une arête de  $G_1$ . Alors  $\gamma_n = g_x * e_x * \gamma * e_y * g_y$ , est un chemin de niveau au plus  $n$ , qui joint  $x_n$  et  $y_n$ . D'après (3.3.15) on sait que

$$\hat{\ell}_1(\gamma_n) \geq \frac{1}{C_0^4 C_1} \pi(c(x, y)) \geq \frac{1}{C_0^4 C_1} (\eta_-)^m. \quad (3.3.17)$$

De l'autre côté, on a

$$\hat{\ell}_1(g_x * e_x) \leq (\eta_+)^k + C_1 \sum_{i=k+1}^n (\eta_+)^i \leq C_1 \sum_{i=k}^{\infty} (\eta_+)^i.$$

Le même calcul est vrai pour  $e_y * g_y$ , et donc on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_1(\gamma) &= \hat{\ell}_1(\gamma_n) - \hat{\ell}_1(g_x * e_x) - \hat{\ell}_1(e_y * g_y) \\ &\geq \hat{\ell}_1(\gamma_n) - 2C_1 \sum_{i=k}^{\infty} (\eta_+)^i \geq \frac{1}{2C_0^4 C_1} \pi(c(x, y)). \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie par définition de  $k_0$  et (3.3.17). Cela finit la preuve du lemme.  $\square$

**3.2. Simplification des hypothèses.** Dans cette section on simplifie les hypothèses du Théorème 3.10 afin de faciliter son application dans des situations concrètes, comme dans les sections suivantes. On suppose toujours que  $X$  est un espace compact, doublant et uniformément parfait. On suppose aussi donnée la généalogie  $\mathcal{V}$  avec  $a$  et  $\lambda$  qui vérifient (3.1.4). Le but est de montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 3.14.** *Il existe  $\eta_0 \in (0, 1)$ , qui dépend seulement de  $\lambda$  et de la géométrie de  $X$ , tel que si  $\{\sigma_k\}_{k \geq 0}$  est une suite de fonctions  $\sigma_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie :*

(S1) *pour tout  $x \in S_k$  et  $k \geq 0$ , si  $\gamma = \{z_i\}_{i=1}^N$  est un chemin de  $\Gamma_{k+1}(x)$  on a*

$$\sum_{i=1}^N \sigma_{k+1}(z_i) \geq 1, \quad (3.3.18)$$

(S2) *et pour tout  $k \geq 0$  et tout  $x \in S_k$ , on a*

$$\sum_{y \in T_k(x)} \sigma_{k+1}(y)^p \leq \eta_0, \quad (3.3.19)$$

*alors il existe une suite de fonctions  $\rho_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui vérifie (H1), (H2), (H3') et (H4).*

Le point important de la proposition est qu'on peut se libérer de la condition (H2) tant que la somme (3.3.19) est suffisamment petite. On commence par montrer deux lemmes, la preuve du premier est inspirée par la construction de mesures doublantes de Vol'berg et Koniagyn [VK88] (voir aussi [Wu98] et [Hei01]).

**LEMME 3.15.** *Supposons qu'on a une fonction  $\pi_0 : S_k \rightarrow (0, +\infty)$  qui vérifie*

$$\forall x \sim x' \in S_k, \quad \frac{1}{C_1} \leq \frac{\pi_0(x)}{\pi_0(x')} \leq C_1, \quad (3.3.20)$$

*où  $C_1 \geq 1$  est une constante. Supposons aussi qu'on a une fonction  $\pi_1 : S_{k+1} \rightarrow (0, +\infty)$  qui vérifie la propriété suivante :*

$$\forall y \in S_{k+1}, \exists x \in S_k \text{ avec } d(y, x) \leq 2a^{-k} \text{ et } 1 \leq \frac{\pi_0(x)}{\pi_1(y)} \leq C_1. \quad (3.3.21)$$

*Alors il existe  $\hat{\pi}_1 : S_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que*

(1) pour tout  $y \sim y' \in S_{k+1}$ ,

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\hat{\pi}_1(y)}{\hat{\pi}_1(y')} \leq C_1.$$

(2) pour tout  $y' \in S_{k+1}$  on a  $\hat{\pi}_1(y') = \pi_1(y')$ , ou bien il existe  $y \sim y' \in S_{k+1}$  tel que  $\hat{\pi}_1(y') = \frac{\pi_1(y)}{C_1}$ . Plus précisément, dans le deuxième cas on a  $\hat{\pi}_1(y') = \max\{\pi_1(y)\}/C_1$  où le maximum est pris sur tous les voisins  $y$  de  $y'$ .

DÉMONSTRATION. Pour chaque paire de voisins  $y, y' \in S_{k+1}$  on regarde si les inégalités

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\pi_1(y)}{\pi_1(y')} \leq C_1$$

sont vraies ou fausses. Seulement une des deux inégalités peut être fausse, et donc on met une arête orientée de  $y$  à  $y'$  si  $\pi_1(y) > C_1\pi_1(y')$ . La propriété fondamentale est la suivante : il n'existe pas de chemin d'arêtes orienté de longueur au moins deux. En effet, supposons que  $y \sim y'$  et  $y' \sim y''$  sont tels que  $\pi_1(y) > C_1\pi_1(y')$  et  $\pi_1(y') > C_1\pi_1(y'')$ . Alors on obtient  $\pi_1(y) > C_1^2\pi_1(y'')$ . Comme  $d(y, y'') \leq 4\lambda a^{-(k+1)} \leq 4a^{-k}$ , si on note  $x, x'' \in S_k$  tels que

$$d(y, x) \leq 2a^{-k} \text{ et } d(y'', x'') \leq 2a^{-k},$$

et aussi tels que

$$1 \leq \frac{\pi_0(x)}{\pi_1(y)} \leq C_1 \text{ et } 1 \leq \frac{\pi_0(x'')}{\pi_1(y'')} \leq C_1,$$

on obtient d'après le point (iv) du Lemme 3.2 que  $x \sim x''$ . Mais comme

$$\pi_0(x) \geq \pi_1(y) > C_1^2\pi_1(y'') \geq C_1\pi_0(x''),$$

on obtient  $\pi_0(x) > C_1\pi_0(x'')$  qui est impossible. Comme conséquence, on a, pour tout  $y \in S_{k+1}$ , toutes les arêtes ou bien rentrent ou bien sortent. On change  $\pi_1$  seulement aux points  $y'$  qui ont toutes les arêtes rentrantes. Voir fig. 3.7.

Soit  $y' \in S_{k+1}$  tel qu'il existe au moins une arête orientée rentrante. Donc pour définir  $\hat{\pi}_1(y')$  on procède de la façon suivante. Soient  $y_i \sim y', i = 1, \dots, l$  tous les voisins de  $y'$ , et soit  $y \in \{y_1, \dots, y_l\}$  tel que

$$\pi_1(y) \geq \pi_1(y_i), \quad i = 1, \dots, l.$$

On remplace  $\pi_1(y')$  par  $\frac{\pi_1(y)}{C_1}$ , c'est-à-dire par  $\hat{\pi}_1(y') = \alpha\pi_1(y')$  où

$$\alpha = \frac{\pi_1(y)}{C_1\pi_1(y')} > 1.$$

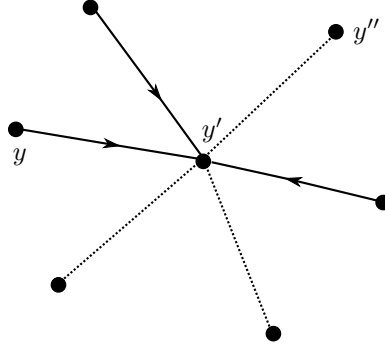


FIGURE 3.7. Situation typique pour  $y' \in S_{k+1}$  avec des arêtes qui rentrent.

Alors pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$  on a

$$\frac{\pi_1(y_i)}{\hat{\pi}_1(y')} = C_1 \cdot \frac{\pi_1(y_i)}{\pi_1(y)} \leq C_1,$$

par définition de  $y$ . Pour voir l'autre inégalité, on note  $x_i \in S_k$  tel que  $d(x_i, y_i) \leq 2a^{-k}$  et tel que

$$1 \leq \frac{\pi_0(x_i)}{\pi_1(y_i)} \leq C_1.$$

On note  $x$  le point correspondant à  $y$ . Alors on a

$$\frac{\pi_1(y_i)}{\hat{\pi}_1(y')} = C_1 \cdot \frac{\pi_1(y_i)}{\pi_1(y)} \geq \frac{\pi_0(x_i)}{\pi_0(x)} \geq \frac{1}{C_1}.$$

Finalement on obtient  $\hat{\pi}_1(y')$  qui vérifie

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\pi_1(y)}{\hat{\pi}_1(y')} \leq C_1$$

pour tous les  $y \sim y'$  et tel qu'il existe  $y \sim y'$  avec  $\hat{\pi}_1(y') = \frac{\pi_1(y)}{C_1}$ . Cela finit la preuve du lemme.  $\square$

LEMME 3.16. Soit  $G = (S, A)$  un graphe de valence bornée par une constante  $K$ . Soit  $\Gamma$  une famille de chemins d'arêtes de  $G$  et  $p \geq 1$ . Si  $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de poids telle que pour tout chemin  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1} \in \Gamma$ , on a

$$\sum_{i=1}^{N-1} \tau(z_i) \geq 1.$$

Alors il existe  $\tilde{\tau} : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout chemin  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$  de  $\Gamma$  on a

$$L(\gamma, \tilde{\tau}) = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\tau}^*(z_i) \wedge \tilde{\tau}^*(z_{i+1}) \geq 1, \quad (3.3.22)$$

où  $\tilde{\tau}^*(x) = \min \{\tilde{\tau}(y) : y \sim x\}$ , et telle que

$$\sum_{z \in S} \tilde{\tau}(z)^p \leq 2^p K^2 \cdot \sum_{z \in S} \tau(z)^p. \quad (3.3.23)$$

DÉMONSTRATION. Pour  $x \in S$  soit  $Q_2(x) = \{y \in S : \exists z \in S \text{ t.q. } y \sim z \sim x\}$  la boule «combinatoire» dans le graphe de rayon 2. On définit  $\hat{\tau} : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\hat{\tau}(x) = \max \{\tau(y) : y \in Q_2(x)\}.$$

Si  $\gamma = \{(z_i, z_{i+1})\}_{i=1}^{N-1}$  est un chemin de  $\Gamma$ , pour  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  on note  $A_i$  les sommets de  $G$  qui sont ou bien voisins de  $z_i$  ou bien voisins de  $z_{i+1}$ . Donc on a

$$\sum_{i=1}^{N-1} \hat{\tau}^*(z_i) \wedge \hat{\tau}^*(z_{i+1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \min \{\hat{\tau}(z) : z \in A_i\}.$$

Si  $y \in Q_2(x)$ , alors  $\hat{\tau}(y) \geq \tau(x)$ . Mais cela implique que

$$\min \{\hat{\tau}(z) : z \in A_i\} \geq \min \{\hat{\tau}(z) : z \in Q_2(z_i)\} \geq \max \{\tau(z_i), \tau(z_{i+1})\}, \quad (3.3.24)$$

car  $A_i$  est contenu dans  $Q_2(z_i)$  et aussi dans  $Q_2(z_{i+1})$ . Donc on obtient

$$\sum_{i=1}^{N-1} \hat{\tau}^*(z_i) \wedge \hat{\tau}^*(z_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\tau(z_i) + \tau(z_{i+1})}{2} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.3.25)$$

De l'autre côté, le cardinal de  $Q_2(x)$  est majoré par  $K^2$  pour tout  $x \in S$ . Donc

$$\sum_{x \in S} \hat{\tau}(x)^p \leq \sum_{x \in S} \sum_{z \in Q_2(x)} \tau(z)^p \leq K^2 \sum_{x \in S} \tau(x)^p.$$

En prenant  $\tilde{\tau} = 2 \cdot \hat{\tau}$  on finit la preuve du lemme.  $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.14. Soit  $\eta_0 \in (0, 1)$  que l'on fixera plus tard. Soit  $\eta_- = (\eta_0 \cdot M^{-1})^{1/p} \in (0, 1)$ , où  $M$  est une constante (qui dépend seulement de  $a$ , de  $\lambda$  et de la constante  $C_D$ ) qui majore le cardinal de  $T_k(x)$  pour tous  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$ . Alors si on prend  $\tau_k = (\sigma_k^p + \eta_-^p)^{1/p}$ , on a  $\tau_k \geq \eta_-$  et la suite  $\{\tau_k\}$  vérifie aussi le point (S1). D'après l'inégalité (3.3.19) pour tous  $x \in S_k$  et  $k \geq 0$  on a

$$\sum_{y \in T_k(x)} \tau_{k+1}(y)^p \leq \sum_{y \in T_k(x)} \sigma_{k+1}(y)^p + \eta_-^p M \leq 2 \cdot \eta_0. \quad (3.3.26)$$

Pour  $x \in S_k$  soit  $Q_{2,k}(x) = \{y \in S_k : \exists z \in S_k \text{ t.q. } y \sim z \sim x\}$  la boule «combinatoire» dans le graphe  $S_k$  de rayon 2. Pour  $k \geq 0$  et  $x \in S_k$  on définit

$$\tilde{\tau}_k(x) = 2 \cdot \max \{\tau_k(y) : y \in Q_{2,k}(x)\}.$$

D'après le Lemme 3.16, on obtient une suite  $\{\tilde{\tau}_k\}_k$  qui vérifie la condition  $(H3')$ , minorée par  $\eta_-$  et telle que pour tout  $x \in S_k$  et  $k \geq 0$  on a

$$\sum_{y \in T_k(x)} \tilde{\tau}_{k+1}(y)^p \leq 2^{p+1} \cdot K^2 \cdot \eta_0. \quad (3.3.27)$$

Ici, la constante  $K$  dépend seulement de  $\lambda$  et de la constante de doublement  $C_D$ , et  $K$  majore le cardinal des 2-voisins horizontaux (c'est-à-dire dans  $S_k$  et à distance combinatoire au plus 2) d'un sommet  $x \in S_k$  quelconque.

Soit  $C_1 = \eta_-^{-1}$ , on construit par récurrence une suite  $\hat{\rho}_k$  qui vérifie

- (1)  $\hat{\rho}_k \geq \tilde{\tau}_k$ , et
- (2)  $(H2)$  avec la constante  $C_1$ .

De plus, on verra de la construction de  $\hat{\rho}_k$  qu'elle vérifie aussi

- (3)  $\hat{\rho}_k(y) \leq \max \{\tilde{\tau}_k(y') : y' \in Q_{1,k}(y)\}$ , où  $Q_{1,k}(y)$  est la boule «combinatoire» dans  $S_k$  centrée dans  $y$  et de rayon 1.

Comme  $\eta_- \leq \tilde{\tau}_1 \leq 1$  on peut prendre  $\hat{\rho}_1 = \tilde{\tau}_1$ . Supposons qu'on a construit  $\hat{\rho}_i$  qui vérifie les points 1 et 2 pour  $i = 1, 2, \dots, j$ , et construisons  $\hat{\rho}_{j+1}$  en utilisant le Lemme 3.15. En utilisant la notation du lemme, on note pour  $x \in S_j$ ,

$$\pi_0(x) = \prod_{i=1}^j \hat{\rho}_i(g(x)_i),$$

et pour  $y \in S_{j+1}$ ,

$$\pi_1(y) = \tilde{\tau}_{j+1}(y) \pi_0(g(y)_j).$$

Comme  $C_1 = \eta_-^{-1}$  et pour tout  $y \in S_{j+1}$  on a  $d(y, g(y)_j) \leq a^{-j}$ , on voit bien que les hypothèses du Lemme 3.15 sont vérifiées. Soit  $\hat{\pi}_1 : S_{j+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  l'application donnée par le lemme.

Soit  $y \in S_{j+1}$ , d'après le point 2 du Lemme 3.15, on a deux possibilités pour  $\hat{\pi}_1(y)$  : ou bien est égale à  $\pi_1(y)$ , ou bien il existe  $y' \in S_{j+1}$  tel que  $y' \sim y$  et tel que  $\hat{\pi}_1(y) = \frac{\pi_1(y')}{C_1}$ . De manière équivalente, on peut écrire  $\hat{\pi}_1(y) = \hat{\rho}_{j+1}(y) \pi_0(g(y)_j)$ , où  $\hat{\rho}_{j+1}(y)$  est ou bien égale à  $\tilde{\tau}_{j+1}(y)$ , ou bien égale à  $\alpha \tilde{\tau}_{j+1}(y)$  avec

$$\alpha = \frac{1}{C_1} \frac{\tilde{\tau}_{j+1}(y') \pi_0(g(y')_j)}{\tilde{\tau}_{j+1}(y) \pi_0(g(y)_j)} > 1.$$

On remarque que

$$\alpha = \frac{\tilde{\tau}_{j+1}(y') \pi_0(g(y')_j)}{C_1 \tilde{\tau}_{j+1}(y) \pi_0(g(y)_j)} \leq \frac{\tilde{\tau}_{j+1}(y')}{\tilde{\tau}_{j+1}(y)}.$$

Donc on obtient

$$\hat{\rho}_{j+1}(y) = \alpha \tilde{\tau}_{j+1}(y) \leq \tilde{\tau}_{j+1}(y').$$



C'est-à-dire, dans ce cas on a  $\hat{\rho}_{j+1}(y) \leq \max_{y' \sim y} \tilde{\tau}_{j+1}(y')$  pour tout  $y \in S_{j+1}$ . Cela montre l'existence de la suite  $\{\hat{\rho}_k\}$  qui vérifie les points (1), (2) et (3) de ci-dessus.

On estime maintenant (en utilisant le point (3) ci-dessus) la somme de  $\hat{\rho}_{k+1}^p$  dans  $T_k(x)$ . Comme pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in S_k$  on a  $|\{x' \sim x\}| \leq K$ , où  $K$  est la constante de ci-dessus, on obtient

$$\sum_{y \in T_k(x)} \hat{\rho}_{k+1}(y)^p \leq \sum_{y \in T_k(x)} \sum_{y' \sim y} \tilde{\tau}_{k+1}(y')^p \leq M \sum_{x' \sim x} \sum_{y \in T_k(x')} \tilde{\tau}_{k+1}(y)^p \leq 2^{p+1} K^4 \cdot \eta_0 = K' \eta_0. \quad (3.3.28)$$

On fixe  $\eta_0 = (2K')^{-1}$  qui dépend seulement de  $\lambda$  et de la constante de doublement  $C_D$ . Alors la somme (3.3.28) est plus petite que  $1/2$ .

Il nous reste à modifier  $\hat{\rho}_k$  de sorte qu'elle vérifie  $(H_4)$ . Pour  $k = 1$  on normalise simplement de sorte que la somme soit égale à 1, et comme on divise par une quantité plus petite que  $\eta_0 < 1$  et la même pour tout  $x \in S_1$ , on préserve aussi les conditions  $(H1)$ ,  $(H2)$  et  $(H3')$ .

Soit maintenant  $k > 1$ , il faut remarquer que si  $x \in S_{k-1}$  alors il appartient aussi à  $T_{k-1}(x)$  (on rappelle que la suite  $\{S_k\}$  est croissante). On note  $T_{k-1}^*(x) = T_{k-1}(x) \setminus \{x\}$ , et on appelle  $x$  le centre de  $T_{k-1}(x)$ . Pour  $x \in S_{k-1}$ , soit  $\omega_{k,x} \in [1, +\infty)$  tel que

$$(\omega_{k,x} \hat{\rho}_k(x))^p + \sum_{y \in T_{k-1}^*(x)} \hat{\rho}_k(y)^p = 1.$$

L'existence de  $\omega_{k,x}$  est justifiée parce que la somme (3.3.28) est strictement plus petite que 1. On définit  $\rho_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\rho_k(y) = \begin{cases} \omega_{k,x} \hat{\rho}_k(x) & \text{si } y = x \in S_{k-1}. \\ \hat{\rho}_k(y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $\omega_{k,x} \geq 1$ , les conditions  $(H1)$  et  $(H3')$  sont vérifiées (pour  $(H1)$ , comme  $|T_k(x)| \geq 2$ , il suffit de prendre  $\eta_+ = 1 - \eta_-$ ). D'après le choix de  $\omega_{k,x}$  on obtient aussi la condition  $(H_4)$ .

Montrons que la condition  $(H2)$  est aussi vérifiée. On remarque que si  $x \in S_{k-1}$  alors tous les voisins de  $x$  dans  $S_k$  appartiennent à  $T_{k-1}(x)$ . Soient  $y, y' \in S_k$  tels que  $y \sim y'$ , et soit  $0 \leq n \leq k-1$  le plus grand entier positif tel que  $g(y)_n = g(y')_n$ . Comme  $y \sim y'$ , pour tout  $i \in \{n+1, \dots, k\}$  on a  $g(y)_i \sim g(y')_i$ . Donc pour tout  $i \in \{n+2, \dots, k\}$ , ni  $g(y)_i$ , ni  $g(y')_i$  peuvent être des centres. Car sinon, comme ils sont voisins, ils auraient le même parent, ce qui est en contradiction avec la définition de  $n$ . Cela implique que  $\rho_i(g(y)_i) = \hat{\rho}_i(g(y)_i)$  et  $\rho_i(g(y')_i) = \hat{\rho}_i(g(y')_i)$  pour tout  $i \in \{n+2, \dots, k\}$ . Pour  $i = n+1$  seulement un des deux peut être un centre. Si

aucun des deux n'est un centre, alors on a

$$\frac{\prod_{i=n+1}^k \rho_i(g(y)_i)}{\prod_{i=n+1}^k \hat{\rho}_i(g(y)_i)} = \frac{\prod_{i=n+1}^k \rho_i(g(y')_i)}{\prod_{i=n+1}^k \hat{\rho}_i(g(y')_i)} = 1. \quad (3.3.29)$$

Si par exemple  $g(y)_{n+1}$  est un centre, le rapport (3.3.29) est égal à  $\omega_{g(y)_{n+1}}$ . Comme pour tout centre  $x$  on a  $\eta_- \leq \omega_{i,x} \rho_i(x) \leq 1$ , on voit que dans tous les cas le rapport (3.3.29) est compris entre 1 et  $C_1$ . Donc on obtient (H2) avec  $C_0 = C_1^2$ . Cela finit la démonstration de la proposition.  $\square$



## CHAPITRE 4

### Dimension conforme Ahlfors régulière et module combinatoire

Le but de cette partie est de montrer comment calculer la dimension conforme AR d'un compact à l'aide du module combinatoire. Dans la Section 1 on définit le module combinatoire associé à une suite de graphes, les nerfs d'une suite des recouvrements de  $X$ , et son exposant critique  $Q_N$ . On montre dans le Théorème 4.5 que  $Q_N$  est égale à la dimension conforme AR de  $X$ .

Dans la Section 2, inspirée de [BouK10], on montre que le module combinatoire vérifie une «défectueuse» inégalité sous-multiplicative qui a comme conséquence la positivité du module combinatoire à l'exposant critique (Corollaire 4.11). On adapte à notre situation des arguments tirés de [KL04] et [Haïss09] pour majorer le module combinatoire à partir du module analytique dans les espaces tangents. Enfin, les faits que  $Q_N = \dim_{AR} X$ , que le module combinatoire est positif à l'exposant critique et majoré par le module des espaces tangents de  $X$ , nous donnent une démonstration plus conceptuelle d'un théorème de Keith et Laakso (Corollaire 4.12).

Dans la Section 3 on traite différentes définitions du module combinatoire. Quand les espaces tangents de  $X$  ne sont pas localement homéomorphes à  $X$ , les nerfs  $G_k$  associés aux recouvrements de  $X$  diffèrent de  $X$  en se rapprochant de ses espaces tangents lorsque  $k$  devient grand (échelles petites). Par exemple, en général il est possible de trouver des courbes dans  $G_k$  qui n'existent pas dans  $X$ .

Dans le Théorème 4.14 on donne des conditions métriques sur  $X$  qui nous permettent de calculer la dimension conforme AR de  $X$  en utilisant l'exposant critique  $Q_X$ , défini à partir des «vraies» courbes de  $X$ . Leur égalité est fondamentale car elle relie les deux définitions de dimension conforme (comme exposant critique des modules de courbes de l'espace et comme infimum des dimensions de Hausdorff dans la jauge); ce résultat était connu de Keith et Kleiner depuis quelques temps lorsque  $X$  est connexe et L-quasi-autosimilaire. Dans ce cas, il suffit de travailler avec le module des courbes de diamètre minoré (Corollaire 4.16). Ceci nous permet de donner dans le Corollaire 4.17 des conditions sous lesquelles la dimension conforme AR de  $X$  est égale au supremum des dimensions conformes AR de ses composantes connexes.

## 1. L'exposant critique du module combinatoire

**1.1. Le module combinatoire dans un graphe.** Pour une exposition détaillée sur le module combinatoire voir [Haïss09]. Soit  $G = (S, A)$  un graphe et soit  $\Gamma$  une famille de sous-ensembles de  $S$ . On considère  $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de poids, pour  $\gamma \in \Gamma$  on définit sa  $\rho$ -longueur en posant

$$\ell_\rho(\gamma) = \sum_{s \in \gamma} \rho(s). \quad (4.1.1)$$

Pour  $p > 0$  on note le  $p$ -volume de  $\rho$

$$\text{Vol}_p(\rho) = \sum_{s \in S} \rho(s)^p. \quad (4.1.2)$$

Alors le  $p$ -module combinatoire de  $\Gamma$  est

$$\text{Mod}_p(\Gamma, G) = \inf_{\rho} \text{Vol}_p(\rho), \quad (4.1.3)$$

où l'infimum est pris sur toutes les  $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui sont  $\Gamma$ -admissibles, c'est-à-dire,  $\ell_\rho(\gamma) \geq 1$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . On remarque que si  $p \in (0, 1)$  alors  $\text{Mod}_p(\Gamma, G) \geq 1$ , sauf si  $\Gamma$  est vide.

**REMARQUE.** Cette définition est une discrétisation de la notion classique de *module conforme* de l'analyse complexe. On rappelle que si  $A \subset \mathbb{C}$  est un anneau, c'est-à-dire un ouvert connexe homéomorphe à  $S^1 \times (0, 1)$ , et les deux composantes connexes du bord sont non triviales, il existe une bijection holomorphe  $\phi : A \rightarrow C_r$  où  $C_r$  est la couronne  $\{1 < |z| < r\}$ . Le module conforme de  $A$  est donc  $\text{Mod}(A) = (1/2\pi) \log(r)$ , qui est un invariant conforme de  $A$ . Si on note  $\Gamma_t$  la famille des courbes de  $A$  qui joint les deux composantes connexes du bord et  $\Gamma_s$  celles qui séparent ces composantes, alors le module conforme de  $A$  est aussi la longueur extrême de  $\Gamma_t$  et l'inverse de celle de  $\Gamma_s$  (voir [Ah73]). C'est cette propriété qui motive la définition qu'on a donné du module combinatoire.

On rappelle qu'on suppose  $X$  un espace métrique compact, uniformément parfait de constante  $C_P \geq 1$  et doublant de constante  $C_D \geq 1$ . En particulier, la jauge conforme  $\mathcal{J}_{AR}(X, d) \neq \emptyset$ . Pour chaque  $k \geq 1$ , soit  $X_k \subset X$  un ensemble  $10^{-k}$ -séparé maximal et soit  $\mathcal{U}_k := \{B_k(x) := B(x, 10^{-k}) : x \in X_k\}$  le recouvrement par boules associé. On suppose la suite  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  croissante. Pour chaque  $k \geq 1$ , on définit le graphe  $G_k$  comme étant le nerf de  $\mathcal{U}_k$ , c'est-à-dire, les sommets de  $G_k$  sont les boules de  $\mathcal{U}_k$  et on met une arête entre  $B$  et  $B'$  si  $\lambda \cdot B \cap \lambda \cdot B' \neq \emptyset$ , où  $\lambda \geq 15$  est une constante (voir (3.1.4)).

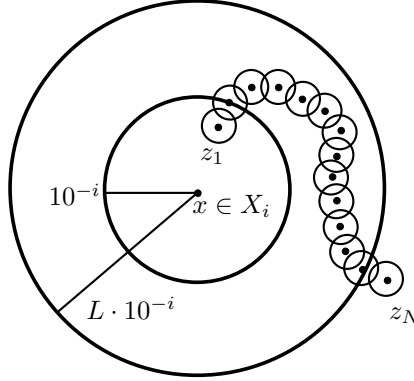


FIGURE 4.1. Définition du module combinatoire  $M_{p,k}(L)$  (Définition 4.1.4). Dans la figure  $x$  est un point de  $X_i$ ,  $i \geq 1$  et  $z_1, z_N$  sont les extrémités d'un chemin  $\gamma$  qui appartient à  $\Gamma_{i,k}^L(x)$ .  $M_{p,k}(L)$  tient compte du module de tous les anneaux de  $X$  centrés sur des points de  $X_i$  de taille  $10^{-i}$ . L'échelle du recouvrement est  $i + k$ , donc  $k$  représente l'échelle relative du recouvrement.  $L$  représente le diamètre relatif des chemins  $\gamma$ .

DÉFINITION 4.1 (Module combinatoire dans le nerf d'un recouvrement). *Soient  $p > 0$  et  $L > 1$ , on définit*

$$M_{p,k}(L) = \sup_{i \geq 1} \max_{x \in X_i} \text{Mod}_p(\Gamma_{i,k}^L(x), G_{i+k}), \quad (4.1.4)$$

où pour  $i, k \geq 1$  et  $x \in X_i$ , on note  $\Gamma_{i,k}^L(x)$  la famille des chemins  $\gamma = \{z_i\}_{i=1}^N$  de  $G_{i+k}$  tels que  $z_1 \in \overline{B}_i(x)$  et  $z_N \in X \setminus L \cdot B_i(x)$  (on identifie une boule  $B \in \mathcal{U}_k$  avec son centre  $z \in X_k$ ). Voir la figure 4.1.

Dans cette première partie,  $L$  est considéré comme un paramètre fixé. On remarque que  $M_{p,k}(L) < +\infty$  pour chaque  $k \geq 1$ , car le cardinal des boules de  $\mathcal{U}_k$  qui intersectent  $L \cdot B_i(x)$  est majoré par une constante qui dépend seulement de  $k$  (et donc uniforme en  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ ).

On étudie le comportement asymptotique de la suite  $\{M_{p,k}(L)\}_k$ , quand  $k$  tend vers l'infini, et sa dépendance en  $p$ . On définit

$$M_p(L) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} M_{p,k}(L). \quad (4.1.5)$$

Le fait est que, à  $k$  fixé, la fonction  $p \mapsto M_{p,k}(L)$  est décroissante, car une fonction de poids minimale est plus petite ou égale à 1, ce qui implique que l'ensemble des  $p \in (0, \infty)$  tels que  $M_p(L) = 0$  est un intervalle.

DÉFINITION 4.2 (L'exposant critique). *On définit l'exposant critique du module combinatoire en posant*

$$Q_N(L) = \inf \{p \in (0, +\infty) : M_p(L) = 0\}. \quad (4.1.6)$$

La lettre  $N$  dans la notation indique que cet exposant est défini à partir du module combinatoire dans le nerf  $G_k$  de la suite de recouvrements  $\mathcal{U}_k$ .

REMARQUE. Si  $p \in (0, 1)$ , alors  $M_{p,k}(L) \geq 1$  sauf si  $\Gamma_{i,k}^L(x)$  est vide pour tous  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ . Si les familles de chemins  $\Gamma_{i,k}^L(x)$  sont vides pour tout  $k$  suffisamment grand, on a  $M_p(L) = 0$  pour tout  $p > 0$ . Donc  $Q_N(L) \notin (0, 1)$ , et  $Q_N(L) = 0$  si et seulement si  $X$  est uniformément discontinu (Définition 2.14).

**1.2. Dimension conforme AR et exposant critique.** On peut maintenant prouver la première inégalité entre  $Q_N(L)$  et la dimension conforme Ahlfors régulière de  $X$  (comparer avec [HP08] Corollaire 3.3).

PROPOSITION 4.3. *Si  $p > \dim_{AR} X$  alors  $M_p(L) = 0$ . Donc  $Q_N(L) \leq \dim_{AR} X$ . En particulier, comme  $X$  est doublant et uniformément parfait, on a  $Q_N(L) < +\infty$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $\dim_{AR} X < p' < p$ , et soit  $d'$  une distance dans la jauge de  $X$  Ahlfors régulière de dimension  $p'$ . On note  $\mu$  la mesure de Hausdorff de  $(X, d')$  de dimension  $p'$ , et  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction de distorsion de  $id : (X, d) \rightarrow (X, d')$ . On fixe  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ , et soit  $k \geq 1$ . On définit  $\rho : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\rho(B) = \begin{cases} \left( \frac{\mu(B)}{\mu((L+1)B_x)} \right)^{1/p'} & \text{si } B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Alors on a

$$\sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \rho(B)^p \leq \max_{B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset} \rho(B)^{p-p'} \cdot \sum_{B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset} \rho(B)^{p'}.$$

On note  $\text{diam}'$  le diamètre pour la distance  $d'$ . Comme  $X$  est uniformément parfait, on a  $\text{diam}((L+1)B_x) \geq (L+1)C_P^{-1}10^{-i}$ . D'après la formule de distorsion des diamètres pour les applications quasimétriques (voir [Hei01] Proposition 10.8), pour toute boule  $B$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  telle que  $B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset$ , on a

$$\begin{aligned} \rho(B) &= \left( \frac{\mu(B)}{\mu((L+1)B_x)} \right)^{1/p'} \asymp \frac{\text{diam}' B}{\text{diam}'(L+1)B_x} \\ &\lesssim \eta \left( 2 \cdot \frac{\text{diam} B}{\text{diam}(L+1)B_x} \right) \leq \eta \left( \frac{4C_P}{(L+1) \cdot 10^k} \right) := \eta_k. \end{aligned}$$

Il existe une constante  $K \geq 1$ , qui dépend seulement de  $\eta$ , telle que pour toute boule  $B \in \mathcal{U}_{i+k}$  il existe une boule  $B'$  pour la distance  $d'$  telle que  $B' \subset \frac{1}{2}B \subset B \subset KB'$ . Comme les boules  $\{\frac{1}{2}B : B \in \mathcal{U}_{i+k}\}$  sont deux à deux disjointes, c'est aussi le cas des boules  $B'$ . Aussi, comme la réunion des boules  $B$  telles que  $B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset$  est contenue dans  $(L+1)B_x$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset} \rho(B)^{p'} &= \frac{1}{\mu((L+1)B_x)} \cdot \sum_{B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset} \mu(B) \leq \frac{1}{\mu((L+1)B_x)} \cdot \sum_{B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset} \mu(KB') \\ &\lesssim \frac{1}{\mu((L+1)B_x)} \cdot \sum_{B \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset} \mu(B') \leq 1. \end{aligned}$$

On regarde maintenant l'admissibilité. Soit  $\gamma = \{z_j\}_{j=1}^N \in \Gamma_{i,k}^L(x)$ , on peut supposer que  $B_{z_j} \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset$  pour tout  $j$ . Comme pour chaque  $j \in \{1, \dots, N-1\}$  on a  $d'(z_j, z_{j+1}) \leq \text{diam}'(\lambda \cdot B_{z_j}) + \text{diam}'(\lambda \cdot B_{z_{j+1}})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \rho(B_{z_j}) &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\mu(B_{z_j})}{\mu((L+1)B_x)} \right)^{1/p'} \\ &\asymp \sum_{j=1}^N \frac{\text{diam}' B_{z_j}}{\text{diam}'(L+1)B_x} \gtrsim \frac{d'(z_1, z_N)}{2 \cdot \text{diam}'(L+1)B_x} \geq c, \end{aligned}$$

où  $c > 0$  est une constante qui dépend seulement de  $\eta$  et de  $L$ . Donc finalement on obtient

$$M_{p,k} \lesssim \eta_k^{p-p'},$$

qui tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini. Cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

Si  $L' \geq L \geq 1$  alors  $M_{p,k}(L') \leq M_{p,k}(L)$  pour tout  $k \geq 1$ , et donc  $Q_N(L') \leq Q_N(L)$ . On commence par montrer dans le lemme suivant que, en fait,  $Q_N(L)$  ne dépend pas de  $L > 1$ .

LEMME 4.4 (Indépendance de  $L$ ). *Soient  $1 < L \leq L'$  et  $p > 0$ . Il existe un entier  $l \geq 0$  et une constante  $C \geq 1$ , qui dépendent seulement de  $L$  et  $L'$ , tels que pour tout  $k \geq 1$  on a*

$$M_{p,l+k}(L) \leq C \cdot M_{p,k}(L').$$

*En particulier,  $Q_N(L) = Q_N(L')$  pour tous  $L$  et  $L'$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $1 < L \leq L'$  et  $x \in X_i$  avec  $i \geq 1$ . On prend  $l \geq 0$  le plus petit entier tel que  $10^{-l} < \frac{L-1}{2L'}$  et soit

$$X_{i+l}(x) := \{y \in X_{i+l} : B_{i+l}(y) \cap B_i(x) \neq \emptyset\}.$$



Soit  $\gamma = \{z_j\}_{j=1}^N$  un chemin de  $\Gamma_{i+l+k}^L(x)$ . Si  $y$  est un élément de  $X_{i+l}(x)$  tel que  $z_1$  appartient à  $B_{i+l}(y)$ , alors  $\gamma$  est un chemin de  $\Gamma_{i+l+k}^{L'}(y)$ . En effet, d'après le choix de  $l$ ,  $z_N$  n'appartient pas à  $L'B_{i+l}(y)$  car  $d(z_1, z_N) \geq (L-1)10^{-i}$ .

Pour chaque  $y \in X_{i+l}(x)$  soit  $\rho_y : \mathcal{U}_{i+l+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de poids optimale pour  $\Gamma_{i+l+k}^{L'}(y)$ . On définit  $\rho : \mathcal{U}_{i+l+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\rho(z) = \max \{\rho_y(z) : y \in X_{i+l}(x)\}.$$

Alors  $\rho$  est  $\Gamma_{i+l+k}^L(x)$ -admissible et il existe une constante  $C$ , qui dépend seulement de  $l$  et de la constante de doublement, telle que

$$\text{Vol}_p(\rho) \leq \sum_{y \in X_{i+l}(x)} \text{Mod}_p \left( \Gamma_{i+l+k}^{L'}(y), G_{i+l+k} \right) \leq C \cdot M_{p,k}(L').$$

Donc on obtient  $M_{p,l+k}(L) \leq C \cdot M_{p,k}(L')$ . □

On fixe  $L = 2$  et on considère  $M_{p,k} := M_{p,k}(2)$ ,  $M_p := M_p(2)$  et  $Q_N := Q_N(2)$ . On peut prouver maintenant le résultat principal de cette section. B. Kleiner m'a informé qu'il avait obtenu un résultat similaire avec S. Keith (non publié).

**THÉORÈME 4.5.** *Soit  $X$  un espace métrique compact, uniformément parfait et doublant. Alors  $Q_N$  est égale à la dimension conforme Ahlfors régulière de  $X$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il s'agit de montrer l'inégalité  $\dim_{AR} X \leq Q_N$ . Soit  $p > 0$  tel que  $M_p = 0$ , on va montrer que  $\dim_{AR} X \leq p$  en appliquant le Théorème 3.10. Soit  $n_0 \geq 1$  suffisamment grand de sorte que  $a = 10^{n_0}$  vérifie le Lemme des constantes 3.1.4, et tel que  $M_{p,n_0} \leq \eta$  où  $\eta \in (0, 1)$  est un nombre que l'on fixera plus tard.

On prend  $S_k = X_{k \cdot n_0}$ , et on l'identifie avec le recouvrement  $\mathcal{U}_{k \cdot n_0}$ . De manière analogue on note  $G_k$  à la place de  $G_{k \cdot n_0}$  et  $\Gamma_k(x)$  au lieu de  $\Gamma_{(k+1) \cdot n_0}(x)$ , la famille des chemins de  $G_{k+1}$  qui «joignent»  $B_x$  et  $X \setminus 2 \cdot B_x$ . Donc on a  $\text{Mod}_p(\Gamma_k(x), G_{k+1}) \leq \eta$  pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in S_k$ . On fixe la généalogie  $\mathcal{V}$  comme étant celle de (3.1.3), c'est-à-dire, on prend

$$V_k(x) = \{y \in X : d(y, x) = \text{dist}(y, S_k)\}.$$

En utilisant cette condition sur les modules combinatoires on construit une suite de fonctions de poids  $\rho_k : S_k \rightarrow (0, 1)$  qui vérifie les hypothèses (S1) et (S2) de la Proposition 3.14. En effet, pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in S_k$ , il existe  $\sigma_x : S_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- (1) si on note  $Q(x) = \{y \in S_{k+1} : B_y \cap 3 \cdot B_x \neq \emptyset\}$ , alors  $\sigma_x(y) = 0$  si  $y \notin Q(x)$ .

(2) pour tout chemin  $\gamma = \{z_i\}_{i=1}^N$  de niveau  $k+1$  tel que  $z_1 \in B_x$  et  $z_N \in X \setminus 2 \cdot B_x$ , on a

$$\sum_{i=1}^N \sigma_x(z_i) \geq 1,$$

(3) et  $\sum_{y \in S_{k+1}} \sigma_x(y)^p \leq \eta$ .

On définit  $\sigma_{k+1} : S_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$\sigma_{k+1}(y) = \max \{ \sigma_x(y) : x \in S_k \}.$$

Comme  $\sigma_{k+1} \geq \sigma_x$  le point 2 ci-dessus continue à être vérifié si l'on remplace  $\sigma_x$  par  $\sigma_{k+1}$ . En utilisant le point 1 et le fait que  $T_k(x) \subset Q(x)$ , pour tous  $k \geq 1$  et  $x \in S_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{y \in T_k(x)} \sigma_{k+1}(y)^p &= \sum_{y \in T_k(x)} \max \{ \sigma_{x'}(y)^p : x' \in S_k \} \leq \sum_{y \in T_k(x)} \sum_{x' : y \in Q(x')} \sigma_{x'}(y)^p \\ &\leq \sum_{x' : Q(x) \cap Q(x') \neq \emptyset} \sum_{y \in Q(x')} \sigma_{x'}(y)^p \leq K \cdot \eta, \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante qui dépend seulement de la constante de doublement de  $X$ , telle que  $|\{x' \in S_k : Q(x') \cap Q(x) \neq \emptyset\}| \leq K$  pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in S_k$ . Donc pour pouvoir appliquer la Proposition 3.14, il suffit de choisir  $\eta \leq K^{-1}\eta_0$ . Cela finit la démonstration du théorème.  $\square$

On termine cette partie avec la remarque suivante :

REMARQUE 1. Une conséquence des démonstrations des théorèmes précédents est la suivante : si  $p > Q_N$ , c'est-à-dire,  $M_p = \liminf_k M_{p,k} = 0$ , on a montré que  $\dim_{AR} X \leq p$ . Donc d'après la Proposition 4.3, pour tout  $p' > p$  on a  $\lim_k M_{p',k} = 0$ . En d'autres termes, on peut remplacer dans la définition de  $Q_N$  la limite inférieure par la limite.

REMARQUE 2. D'après la remarque qui suit la Définition 4.2 on a  $Q_N = \dim_{AR} X$  est égale à zéro si et seulement si  $X$  est uniformément discontinu. Dans ce cas, la dimension conforme AR n'est pas atteinte.

## 2. Comparaison avec les espaces tangents

**2.1. Majoration du module combinatoire à partir du module analytique.** Le but de cette partie est de montrer que quand  $X$  est  $p$ -régulier,  $M_p$  est majoré par le  $p$ -module analytique de courbes dans les espaces tangents de  $X$ , qu'on utilisera dans la section suivante pour donner une preuve d'un théorème de Keith et Laakso [KL04] sur l'existence de familles de courbes de module positif. On reproduit

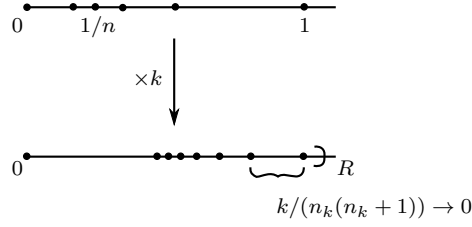


FIGURE 4.2. La figure montre un exemple où  $X := \{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$ . Dans ce cas, il existe un espace tangent sur le point 0 qui est isométrique à  $\mathbb{R}_+$ . Etant fixé  $R > 0$ , si on note  $X_k := k \cdot X$ ,  $k \geq 1$ , alors  $X_k \cap [0, R] := \{1/n : n \geq n_k\}$  où  $n_k = \lfloor k/R \rfloor + 1$ . Donc la distance de Hausdorff entre  $X_k$  et  $[0, R]$  est majoré par  $k/(n_k(n_k + 1))$  qui tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini.

essentiellement des arguments qui apparaissent dans [KL04] et [Haïss09], avec de petites modifications dues au fait que les définitions sont ici légèrement différentes.

On commence par rappeler quelques définitions ; pour une exposition détaillée, on se réfère à [MT10]. On dit qu'une suite de sous-ensembles fermés non vides  $\{F_n\}_n$  d'un espace métrique  $(Z, d)$  converge au sens de Hausdorff vers un ensemble fermé  $F \subset Z$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in F_n \cap B(x, R)} \text{dist}(z, F) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in F \cap B(x, R)} \text{dist}(z, F_n) = 0, \quad (4.2.1)$$

pour tous  $x \in Z$  et  $R > 0$ . La convergence d'espaces métriques mesurés est la suivante.

**DÉFINITION 4.6** (Convergence d'espaces mesurés). *Une suite d'espaces métriques mesurés, complets et pointés  $\{(Z_n, d_n, \mu_n, p_n)\}$  converge vers un espace métrique mesuré, complet et pointé  $(Z, d, \mu, p)$ , s'il existe un espace métrique pointé  $(\mathcal{Z}, D, q)$  et des plongements isométriques  $\iota_n : Z_n \rightarrow \mathcal{Z}$  et  $\iota : Z \rightarrow \mathcal{Z}$  avec  $\iota_n(p_n) = \iota(p) = q$  pour tout  $n \geq 0$ , tels que  $\{\iota_n(Z_n)\}$  converge au sens de Hausdorff vers  $\iota(Z)$  et  $\{(\iota_n)_* \mu_n\}$  converge faiblement vers  $\iota_* \mu$ . Si on ignore les mesures, on obtient la convergence de Gromov-Hausdorff pour les espaces métriques.*

Si  $X$  est un espace doublant, pour n'importe quelle suite  $\{r_n\}$  d'échelles, n'importe quelle suite de points  $\{x_n\}$  de  $X$ , la famille  $\{(X, x_n, r_n^{-1}d)\}$  est relativement compacte pour la topologie de Gromov-Hausdorff. On parle d'espaces tangents faibles pour ces limites, et d'espaces tangents quand  $\{x_n\}$  est constante et  $\{r_n\}$  tend vers zéro (voir la figure 4.2 pour un exemple d'espace tangent).

Si  $(X, d, \mu)$  est Ahlfors régulier de dimension  $p > 0$ , et  $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$  est un tangent faible de  $X$  avec suite d'échelles  $\{r_n\}$ , alors  $X_\infty$  est aussi régulier de dimension  $p$ , où la mesure de Hausdorff de dimension  $p$  est comparable à une limite faible de  $\{r_n^{-p}\mu\}$ , qu'on note  $\mu_\infty$ . On rappelle aussi (voir [Hei01]) que si  $\Gamma$  est une famille de courbes de  $X$ , alors le  $p$ -module analytique de  $\Gamma$  est par définition

$$\text{Mod}_p(\Gamma) = \inf_{\rho} \int_X \rho^p d\mu,$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions boréliennes  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  qui sont  $\Gamma$ -admissibles. On remarque que si  $p \in (0, 1)$ , alors  $X$  est uniformément discontinu et donc toute courbe de  $X$  est constante (voir aussi le Théorème 5.1.9 de [MT10]). Quand on parle de module analytique dans un espace tangent, il est toujours calculé en utilisant la mesure  $\mu_\infty$  de ci-dessus.

On suppose dorénavant que  $X$  est  $p$ -régulier. Soit  $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$  un espace tangent faible de  $X$ . On considère la famille  $\Gamma(x_\infty)$  des courbes qui joignent  $B(x_\infty, 1)$  et  $X \setminus B(x_\infty, 2)$ .

DÉFINITION 4.7 (Module dans les tangents). *On définit*

$$M_p^T := \sup \{ \text{Mod}_p(\Gamma(x_\infty)) : (X_\infty, d_\infty, x_\infty) \text{ est un tangent faible de } X \}.$$

La proposition suivante montre que le module analytique dans les tangents domine les modules combinatoires.

PROPOSITION 4.8. *Il existe une constante  $C$ , qui dépend seulement de la constante de doublement de  $X$ , telle que  $M_p \leq C \cdot M_p^T$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $p \in (0, 1)$ , l'inégalité est triviale car  $X$  est uniformément discontinu et donc  $M_p = M_p^T = 0$ . Donc on peut supposer que  $p \geq 1$ . On ne donne pas tous les détails de la preuve de la proposition, car elle consiste en de petites modifications d'arguments qui apparaissent dans la Section 3 de [KL04] et dans l'Annexe B de [Haïss09].

Soient  $C \geq 1$  et  $\epsilon > 0$ , et supposons  $M_p > C \cdot M_p^T$ . Cela veut dire qu'il existe  $k_0 \geq 1$  tel que pour tout  $k \geq k_0$ , il existe  $i = i_k \geq 1$  et  $x = x_k \in X_i$  tels que

$$\text{Mod}_p(\Gamma_{i,k}(x), G_{i+k}) \geq C \cdot M_p^T + \delta, \text{ où } \delta > 0.$$

Soit  $r_k = 10^{-i_k}$ , et considérons la suite  $\{(X, r_k^{-1}d, x_k)\}_k$ . Soit  $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$  un point limite. On fixe un espace métrique compact  $Z$  et des plongements isométriques  $\iota : \overline{B}(x_\infty, 3) \rightarrow Z$  et  $\iota_k : (\overline{B}(x_k, 3), r_k^{-1}d) \rightarrow Z$  pour chaque  $k$ . On identifie la famille de courbes  $\Gamma(x_\infty)$  et les familles de chemins  $\Gamma_{i,k}(x)$  avec ces images par les

plongements  $\iota$  et  $\iota_k$ . De manière analogue on identifie la mesure  $\mu_\infty$  avec son image par  $\iota$ .

Considérons  $\rho : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue  $\Gamma(x_\infty)$ -admissible telle que  $\text{Vol}_p(\rho) \leq \text{Mod}_p(\Gamma(x_\infty)) + \epsilon \leq M_p^T + \epsilon$ . On peut supposer que  $\rho \geq m > 0$ . On définit  $\rho_k : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant (on identifie aussi  $\mathcal{U}_{i+k}$  avec son image par  $\iota_k$ )

$$\rho_k(B) = \frac{3}{2} \inf \{ \rho(y) : y \in \lambda \cdot B \} \text{diam}_Z(\lambda \cdot B). \quad (4.2.2)$$

Pour  $k$  suffisamment grand  $\rho_k$  est  $\Gamma_{i,k}(x)$ -admissible (voir [Haïss09] Proposition B.2 et [KL04] Proposition 3.2.4). Comme  $X_{i+k}$  est un ensemble  $10^{-k}$ -séparé pour la distance de  $Z$ , il existe une constante  $K$  qui dépend seulement de la constante d'Ahlfors régularité, telle que  $\text{Vol}_p(\rho_k) \leq K \cdot \text{Vol}_p(\rho) \leq K \cdot (M_p^T + \epsilon)$ . Donc pour tout  $\epsilon > 0$  on a

$$C \cdot M_p^T + \delta \leq K \cdot (M_p^T + \epsilon),$$

qui est impossible si  $C > K$ . Cela finit la preuve.  $\square$

**2.2. Module positif à l'exposant critique.** Dans cette partie on montre que la suite  $\{M_{p,k}\}_k$  admet une borne inférieure strictement positive quand  $p = Q_N$ . En effet, cela est une conséquence du fait que la suite  $\{M_{p,k}\}_k$  vérifie une «défectueuse» inégalité sous-multiplicative en  $k$ . La démonstration est une modification des arguments tirés de [BouK10] section 3 (voir aussi la remarque 4 qui suit la Proposition 3.15).

On fixe  $L \geq 2$  et on note aussi  $M_{p,k} = M_{p,k}(L)$ . Pour  $i, k \geq 1$  et  $x \in X_i$  on note  $\Gamma'_{i,k}(x)$  la famille des chemins de  $G_{i+k}$  qui joignent  $L_1 \cdot B_i(x)$  et  $L_2 \cdot B_i(x)$ , où

$$L_1 = \frac{11}{10} \text{ et } L_2 = L - \frac{1}{10}.$$

On définit  $M'_{p,k}$  de la même façon que  $M_{p,k}$  en remplaçant  $\Gamma_{i,k}(x)$  par  $\Gamma'_{i,k}(x)$  dans la définition 4.1.4. Alors on a le lemme suivant :

LEMME 4.9. *Il existe une constante  $C \geq 1$ , qui dépend seulement de  $p$ , de  $L$  et de la constante de doublement  $C_D$ , telle que*

$$M_{p,k+l} \leq C \cdot M'_{p,k} \cdot M_{p,l}. \quad (4.2.3)$$

*pour tous  $k$  et  $l$ .*

DÉMONSTRATION. Pour chaque  $i, k \geq 1$  et  $x \in X_i$  on note  $\rho_{i+k}^x : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de poids minimale, c'est-à-dire, qui vérifie :  $\rho_{i+k}^x$  est  $\Gamma_{i,k}(x)$ -admissible

et

$$\sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \rho_{i+k}^x(B)^p = \text{Mod}_p(\Gamma_{i,k}(x), G_{i+k}).$$

De manière analogue on définit  $\sigma_{i+k}^x : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction de poids minimale pour  $M'_{p,k}$ . La minimalité de  $\rho_{i+k}^x$  et  $\sigma_{i+k}^x$ , implique que  $\rho_{i+k}^x(B) = \sigma_{i+k}^x(B) = 0$  pour les boules  $B$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  qui n'intersecte pas  $L\bar{B}_i(x)$ . Pour alléger les notations dans les calculs suivants, on va noter  $B_z$  au lieu de  $B_k(z)$  pour  $z \in X_k$ . Pour  $B_x \in \mathcal{U}_i$  on note  $\mathcal{U}_{i+k}(B_x)$  les boules  $B_z \in \mathcal{U}_{i+k}$  telles que  $B_z \cap L\bar{B}_x \neq \emptyset$ , et  $\chi_{i+k}^x : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \{0, 1\}$  la fonction caractéristique de  $\mathcal{U}_{i+k}(B_x)$ .

Maintenant on fixe  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ . Il s'agit de majorer le  $p$ -module combinatoire de la famille de chemins  $\Gamma_{i+k+l}(x)$  de  $G_{i+k+l}$ . On définit  $\rho : \mathcal{U}_{i+k+l} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\rho(B) = \max \{ \sigma_{i+k}^x(B_z) \cdot \rho_{i+k+l}^z(B) : z \in X_{i+k} \} \cdot \chi_{i+k+l}^x(B). \quad (4.2.4)$$

Alors le  $p$ -volume est majoré par :

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k+l}} \rho(B)^p &= \sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k+l}} \max \{ \sigma_{i+k}^x(B_z)^p \cdot \rho_{i+k+l}^z(B)^p : z \in \mathcal{U}_{i+k} \} \chi_{i+k+l}^x(B) \\ &\leq \sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k+l}} \sum_{B_z \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma_{i+k}^x(B_z)^p \cdot \rho_{i+k+l}^z(B)^p \chi_{i+k+l}^x(B) \chi_{i+k}^z(B) \\ &= \sum_{B_z \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma_{i+k}^x(B_z)^p \cdot \left( \sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k+l}} \rho_{i+k+l}^z(B)^p \chi_{i+k+l}^x(B) \chi_{i+k}^z(B) \right) \\ &\leq \sum_{B_z \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma_{i+k}^x(B_z)^p \cdot \text{Mod}_p(\Gamma_{(i+k)+l}(z), G_{(i+k)+l}) \\ &\leq \text{Mod}_p(\Gamma'_{i+k}(x), G_{i+k}) \cdot \max_{z \in X_{i+k}} \text{Mod}_p(\Gamma_{(i+k)+l}(z), G_{(i+k)+l}) \\ &\leq M'_{p,k} \cdot M_{p,l}. \end{aligned}$$

On regarde maintenant l'admissibilité ; soit  $\gamma = \{w_j\}_{j=1}^N \in \Gamma_{i+k+l}(x)$ . Alors si  $B_z \in \mathcal{U}_{i+k}$  est telle que  $B_z \cap \gamma \neq \emptyset$ , comme  $\text{diam} \gamma \geq (L-1)10^{-i}$  et  $\text{diam}(LB_z) \leq 2L \cdot 10^{-(i+k)}$ , le chemin  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_{i+k+l}(z)$ . On fixe  $z \in X_{i+k}$  tel que  $B_z \cap \gamma \neq \emptyset$ , et soient  $j_1 < j_2 \in \{1, \dots, N\}$  tels que  $w_{j_1} \in B_z$  et  $w_{j_2} \in X \setminus LB_z$ . Donc, en utilisant l'admissibilité de  $\rho_{i+k+l}^z$ , on obtient

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} \rho(B_{w_j}) \geq \sum_{j=j_1}^{j_2} \sigma_{i+k}^x(B_z) \rho_{i+k+l}^z(B_{w_j}) \geq \sigma_{i+k}^x(B_z). \quad (4.2.5)$$

Soit  $\mathcal{U}_{i+k}(\gamma)$  l'ensemble des  $z \in X_{i+k}$  tels que  $B_z \cap \gamma \neq \emptyset$ , alors il existe un chemin  $\gamma' \in \Gamma'_{i+k}(x)$  qui est contenu dans  $\mathcal{U}_{i+k}(\gamma)$ . Cela implique

$$1 \leq \sum_{B_z \cap \gamma \neq \emptyset} \sigma_k^{x,i}(B_z) \leq \sum_{B_z \cap \gamma \neq \emptyset} \sum_{j_1}^{j_2} \rho(B_{w_{j_1}}) \leq K \cdot \sum_1^N \rho(B), \quad (4.2.6)$$

où  $K$  est une constante qui majore le cardinal de  $\mathcal{U}_{i+k}(B)$  et qui dépend seulement de  $L$  et de la constante de doublement  $C_D$ . Donc, si on multiplie  $\rho$  par  $K$ , on obtient une fonction de poids  $\Gamma_{i+k+l}(x)$ -admissible, telle que sa  $p$ -masse est majorée par  $K^p \cdot M'_{p,k} \cdot M_{p,l}$ . Cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

La conséquence la plus importante de la sous-multiplicativité est la suivante :

LEMME 4.10. *Soit  $\epsilon = (3C)^{-1}$  où  $C$  est la constante du Lemme 4.9. Alors  $M'_{Q_N,k} \geq \epsilon$  pour tout  $k \geq 1$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $1 \leq k \leq n$  quelconques, alors d'après le Lemme 4.9 on a

$$M_{p,n} \leq (C \cdot M'_{p,k})^m \cdot \max_{0 < r < k} M'_{p,r},$$

où  $m = [n/k]$ . En particulier, à  $k$  fixé, la limite de  $M_{p,n}$  quand  $n$  tend vers l'infini est majorée par la limite de  $c_k \theta_k^{[n/k]}$ , où  $\theta_k = C \cdot M'_{p,k}$  et  $c_k$  est le maximum des  $M'_{p,r}$  avec  $0 < r < k$ . Donc  $M_p = 0$  s'il existe  $k \geq 1$  tel que  $M'_{p,k} < C^{-1}$ . C'est-à-dire, on a les inclusions des intervalles suivantes :

$$A' := \{p : M'_p = 0\} \subset B := \{p : \exists k, M'_{p,k} < C^{-1}\} \subset A := \{p : M_p = 0\}.$$

Supposons qu'il existe  $k \geq 1$  tel que  $M'_{p,k} < \epsilon$ . Soit  $K$  une constante qui majore le cardinal des boules  $B \in \mathcal{U}_{i+k}$  telles que  $B \cap L \cdot B_x \neq \emptyset$ , pour tout  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ . Comme  $M'_{p,k} < \epsilon$ , on a  $\text{Mod}_p(\Gamma'_{i+k}(x), G_{i+k}) < \epsilon$  pour tout  $i \geq 1$  et tout  $x \in X_i$ .

Soient  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ , on considère  $\rho : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de poids optimale pour  $\Gamma'_{i+k}(x)$ . Par optimalité,  $\rho(B) = 0$  pour toute boule  $B$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  qui n'intersecte pas  $L \cdot B_x$ . On définit  $\sigma : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\sigma(B) := \max \left\{ \rho(B), (\epsilon K^{-1})^{1/p} \right\}.$$

Alors  $\sigma$  est une fonction de poids  $\Gamma'_{i,k}(x)$ -admissible, minorée par  $(\epsilon K^{-1})^{1/p}$  et de  $p$ -volume majoré par

$$\sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma(B)^p \leq \sum_{B \cap L \cdot B_x \neq \emptyset} \rho(B)^p + (\epsilon K^{-1}) \cdot |\{B \in \mathcal{U}_{i+k} : B \cap L \cdot B_x \neq \emptyset\}| \leq 2\epsilon.$$

Cela implique que pour  $q \leq p$  on a

$$\begin{aligned} \text{Mod}_q(\Gamma'_{i+k}(x), G_{i+k}) &\leq \sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma(B)^q \leq \max \{ \sigma(B)^{q-p} \} \cdot \sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma(B)^p \\ &\leq \left( \frac{K}{\epsilon} \right)^{(p-q)/p} \cdot 2\epsilon = \left( \frac{K}{\epsilon} \right)^{1-\frac{q}{p}} \cdot 2\epsilon. \end{aligned}$$

En particulier,  $M'_{q,k} < 3\epsilon = C^{-1}$  si  $q < p$  est suffisamment proche de  $p$ . Supposons maintenant par l'absurde que  $M'_{Q_N,k} < \epsilon$ . Alors il existe  $q < Q_N$  suffisamment proche de  $Q_N$  tel que  $M'_{q,k} < C^{-1}$ . Donc  $M_q = 0$  qui est une contradiction, cela finit la preuve.  $\square$

Une légère modification de la preuve du Lemme 4.4 montre qu'il existe  $l \geq 1$  et une constante  $C'$  tels que  $M'_{Q_N,k+l} \leq C \cdot M_{Q_N,k}$ , et donc cela nous permet de prouver le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.11** (Positivité du module à l'exposant critique). *La suite des modules  $\{M_{Q_N,k}(L)\}_k$  admet une borne inférieure strictement positive qui dépend seulement de  $L$  et de la constante de doublement de  $X$ .*

Cette borne inférieure (et donc, en effet, l'inégalité sous-multiplicative) avec les faits que : (a) le module combinatoire est majoré par le module analytique des espaces tangents de  $X$  et que (b) l'exposant critique est égale à la dimension conforme, nous permettent de donner une interprétation plus conceptuelle du théorème suivant de Keith et Laakso (voir [KL04]) :

**THÉORÈME 4.12** (Keith-Laakso). *Soit  $X$  compact et  $Q$ -régulier,  $Q > 1$ , tel que  $\dim_{AR} X = \dim_H X$ , alors il existe  $X_\infty$  un espace tangent faible de  $X$  et une famille de courbes  $\Gamma \subset X_\infty$ , de diamètre minoré et de  $Q$ -module strictement positif.*

**DÉMONSTRATION.** En effet, d'après la Proposition 4.8, on sait que  $M_Q \leq C \cdot M_Q^T$ , et comme d'après le Corollaire 4.11, on sait que  $M_Q > 0$  (car  $Q = Q_N$ ), on conclut qu'il existe un espace tangent faible  $(X_\infty, x_\infty)$  de  $X$ , tel que la famille des courbes qui joignent  $B(x_\infty, 1)$  et  $B(x_\infty, 2)$  a son  $Q$ -module strictement positif.  $\square$

### 3. Différentes définitions de module combinatoire

**3.1. Le module des courbes dans l'espace.** Dans de cette partie, on introduit un deuxième module combinatoire  $M_{p,k}^X$  défini en utilisant des courbes de  $X$ . Nous donnons des conditions topologiques et métriques sur l'espace  $X$ , de sorte que ces deux modules  $M_{p,k}^X$  et  $M_{p,k}$  — ce dernier défini dans la section précédente en utilisant des chemins dans les graphes  $G_k$  — aient le même comportement asymptotique



quand  $k$  tend vers l'infini. Par exemple, en général, les graphes  $G_k$  ne reflètent pas bien les propriétés topologiques de  $X$  : ils peuvent avoir des courbes qui n'existent pas dans l'espace. Ce nouveau module nous permettra de calculer la dimension conforme Ahlfors régulière d'un espace  $X$  en utilisant des courbes de  $X$ .

Soient  $\Gamma$  une famille de courbes de  $X$  et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour  $\gamma \in \Gamma$  on note  $\mathcal{U}(\gamma) = \{U \in \mathcal{U} : U \cap \gamma \neq \emptyset\}$ . Pour chaque  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ , on note  $\Gamma_i(x)$  la famille de courbes de  $X$  qui intersectent  $\ell \cdot \overline{B}_x$  et  $X \setminus L \cdot B_x$ , où  $L \geq 2$  et  $\ell := 11/10$ . Donc, pour tous  $i, k \geq 1$  et  $x \in X_i$ , on définit la famille de sous-ensembles de  $G_{i+k}$  suivante :

$$\Delta_{i+k}(x) = \{\mathcal{U}_{i+k}(\gamma) : \gamma \in \Gamma_i(x)\}.$$

Finalement on note  $\text{Mod}_p(\Gamma_i(x), \mathcal{U}_{i+k}) := \text{Mod}_p(\Delta_{i+k}(x), G_{i+k})$ .

DÉFINITION 4.13 (Module combinatoire des courbes dans l'espace). *On définit*

$$M_{p,k}^X(L) = \sup_{i \geq 1} \max_{x \in X_i} \text{Mod}_p(\Gamma_i(x), \mathcal{U}_{i+k}). \quad (4.3.1)$$

La lettre  $X$  dans la notation est pour indiquer que le module est calculé avec des courbes de  $X$ .

REMARQUE. Il faut remarquer que l'on pourrait utiliser des recouvrements plus généraux pour définir cette suite de modules combinatoires. Mais d'après le Lemme 2.9 de [Haïss09], si deux suites de recouvrements de  $X$  ont un indice de recouvrement uniformément borné, leurs comportements asymptotiques sont comparables. Cela implique que l'on pourrait remplacer les recouvrements  $\mathcal{U}_k$  par des  $\kappa$ -approximations à l'échelle  $k$ , définies dans [BouK10]. Beaucoup d'arguments sont aussi vrais pour des suites de *quasi-empilements* définies dans [Haïss09].

Pour alléger les notations, on note  $M_{p,k}^X$  à la place de  $M_{p,k}^X(L)$ . La suite  $\{M_{p,k}^X\}$  a les mêmes propriétés que  $\{M_{p,k}\}$  : à  $k$  fixé la fonction  $p \mapsto M_{p,k}^X$  est décroissante et l'ensemble des  $p \in (0, \infty)$  tels que  $M_p^X := \liminf_k M_{p,k}^X = 0$  est un intervalle. On définit de manière analogue l'exposant critique  $Q_X$ .

La première chose à remarquer est que la suite  $\{M_{p,k}^X\}_k$  vérifie, en effet, une «vraie» inégalité sous-multiplicative en  $k$  : il existe une constante  $C \geq 1$ , qui dépend seulement de  $p$ , de  $L$  et de la constante de doublement  $C_D$ , telle que

$$M_{p,k+l}^X \leq C \cdot M_{p,k}^X \cdot M_{p,l}^X. \quad (4.3.2)$$

pour tous  $k$  et  $l$ . La preuve est analogue à celle de (4.2.3), sauf qu'ici, la famille de courbes  $\Gamma_i(x)$  ne change pas avec l'échelle, et donc il n'est pas nécessaire de considérer le module  $M'_{p,k}$  comme avant. Alors, si on pose  $\epsilon_L = C^{-1}$ , on a (à comparer avec

[BouK10] Section 3)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_{p,k}^X = 0 \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \text{ tel que } M_{p,k}^X < \epsilon_L, \quad (4.3.3)$$

et donc  $M_{p,k}^X \geq \epsilon_L$  pour tout  $k \geq 1$  si  $p \in (0, Q_X]$ . On remarque qu'on a toujours  $Q_X \leq Q_N$ , car pour toute courbe  $\gamma \in \Gamma_i(x)$ , le sous-ensemble  $\mathcal{U}_{i+k}(\gamma)$  contient un chemin qui appartient à  $\Gamma'_{i+k}(x)$ , et donc  $M_{p,k}^X \leq M'_{p,k}$ . En général cette inégalité peut être stricte (voir la Remarque suivant le Théorème 4.14).

On rappelle que  $X$  est linéairement connexe (LC) s'il existe un module de connexité linéaire (voir Définition 2.8) et qu'on note  $C_\ell \geq 1$  la constante de linéarité. On rappelle aussi que  $V_r(A)$  désigne le  $r$ -voisinage de  $A$ . Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.14.** *Soit  $X$  un espace métrique compact, uniformément parfait et doublant. Supposons que  $X$  vérifie aussi les deux hypothèses suivantes :*

- (1) *(Connexité linéaire uniforme des composantes) Il existe une constante  $C_\ell \geq 1$  telle que toute composante connexe de  $X$  est  $C_\ell$ -linéairement connexe.*
- (2) *(Séparation uniforme des composantes) Il existe une constante  $C_s \geq 1$  telle que : pour tout  $0 < r \leq \text{diam} X$ , il existe un recouvrement ouvert et fermé  $\mathcal{W}_r$  de  $X$ , tel que pour tout  $W \in \mathcal{W}_r$  on a  $\text{dist}(W, X \setminus W) \geq r/C_s$  et il existe une composante connexe  $Y$  de  $X$  telle que  $Y \subset W \subset V_r(Y)$ .*

*Alors  $Q_X = Q_N$ . En particulier, si  $X$  est connexe et LC, l'exposant  $Q_X$  est égale à la dimension conforme Ahlfors régulière de  $X$ .*

On fait quelques remarques avant de commencer la preuve du théorème.

**REMARQUE 1.** Il est possible, en général, d'avoir  $Q_X < Q_N$ . Dans la section 3 du Chapitre 5, on construit un exemple d'un compact connexe  $X \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $Q_X = 1$  et  $Q_N = 2$ .

**REMARQUE 2.** L'hypothèse du point 2 est inspirée de la notion analogue de discontinuité uniforme (Définition 2.14) de David et Semmes. On l'appelle *séparation uniforme des composantes*. Par compacité on peut toujours supposer que le recouvrement  $\mathcal{W}_r$  est fini.

On peut l'énoncer de la façon suivante. Etant donné  $\epsilon > 0$ , on peut définir une relation d'équivalence  $\sim_\epsilon$  sur  $X$ , dans laquelle deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  sont  $\epsilon$ -équivalents s'ils peuvent se connecter par une  $\epsilon$ -chaîne ; i.e. il existe une suite  $\{z_i\}_{i=1}^N \subset X$  avec  $z_1 = x$ ,  $z_N = y$  et  $d(z_i, z_{i+1}) \leq \epsilon$  pour tout  $i = 1, \dots, N-1$ .

Chaque  $\epsilon$ -classe  $W$  est ouverte et fermée, et  $\text{dist}(W, X \setminus W) \geq \epsilon$ . De plus, si  $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$  et on note  $W_{\epsilon_i}(x)$ ,  $i = 1, 2$ , la  $\epsilon_i$ -classe qui contient  $x$ , alors  $W_{\epsilon_1}(x) \subset W_{\epsilon_2}(x)$  et

$\bigcap_{\epsilon > 0} W_\epsilon(x) = Y$  où  $Y$  est la composante connexe de  $X$  qui contient  $x$ . En particulier, pour tout  $0 < r \leq \text{diam}X$ , il existe  $\epsilon_r$  tel que si  $\epsilon \leq \epsilon_r$  alors  $W_\epsilon(x) \subset V_r(Y)$ .

La condition 2 est équivalente à : pour tout  $\epsilon \in (0, \text{diam}X)$  et toute  $\epsilon$ -classe  $W$ , il existe une composante connexe  $Y$  de  $X$  telle que  $W \subset V_{C_s\epsilon}(Y)$ .

En effet, supposons que  $X$  vérifie la condition 2. On prend  $r = C_s\epsilon$ . Si  $\mathcal{W}_r$  est un recouvrement fini de taille  $r$ , comme dans la condition 2, alors chaque élément  $W$  de  $\mathcal{W}_r$  est une réunion de  $\epsilon$ -classes, et chacune de ces classes est dans le  $r$ -voisinage de la composante connexe  $Y$  de  $X$  correspondante à  $W$ .

Réciproquement, comme les  $\epsilon$ -classes forment un recouvrement ouvert de  $X$  et sont deux à deux disjointes, pour chaque  $\epsilon > 0$  il y a seulement une quantité finie de classes, qu'on note maintenant  $W_i(\epsilon)$  pour  $i = 1, \dots, N_\epsilon$ . Si une composante  $Y$  de  $X$  intersecte une  $\epsilon$ -classe  $W_i(\epsilon)$ , elle doit être contenue dans cette classe. On considère  $Y_i$  une composante connexe de  $X$  telle que  $W_i(\epsilon)$  est dans le  $C_s\epsilon$ -voisinage de  $Y_i$ . Pour chacune des  $Y_i$ , on considère l'ouvert fermé  $U_i$  formé par les  $\epsilon$ -classes contenues dans le  $C_s\epsilon$ -voisinage de  $Y_i$ . On obtient ainsi un recouvrement de  $X$  par des ouverts fermés  $\{U_i\}$ , à distance au moins  $\epsilon$  de leur complémentaire et tels que  $Y_i \subset U_i \subset V_{C_s\epsilon}(Y_i)$  pour chaque  $i$ . On remarque que les  $U_i$  ne sont pas forcément disjoints.

On finit avec une autre formulation de la condition 2. Pour chaque  $\epsilon > 0$ , chaque  $i \in \{1, \dots, N_\epsilon\}$  et chaque composante  $Y$  de  $X$  on note

$$d_Y(\epsilon, i) := \inf \{r > 0 : W_i(\epsilon) \subset V_r(Y)\}.$$

Pour chaque classe  $W_i(\epsilon)$  on note

$$r_i(\epsilon) := \inf \{d_Y(\epsilon, i) : Y \text{ composante connexe de } X\},$$

et finalement on définit  $h : (0, \text{diam}X] \rightarrow \mathbb{R}_+$  on posant

$$h(\epsilon) = \max \{r_i(\epsilon) : i = 1, \dots, N_\epsilon\}. \quad (4.3.4)$$

Donc l'hypothèse dit qu'il existe une constante uniforme  $C_s$  telle que  $h(\epsilon) \leq C_s \cdot \epsilon$  pour tout  $0 < \epsilon \leq \text{diam}X$  (voir aussi la figure 4.3).

Par exemple, le Cantor de segments  $X := \mathcal{C}_3 \times [0, 1]$ , où  $\mathcal{C}_3$  est l'ensemble de Cantor triadique, vérifie les hypothèses du théorème.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.14.** Il s'agit de montrer l'inégalité  $Q_N \leq Q_X$ . Soit  $p > 0$ , on montre qu'il existe des constantes  $M$  et  $k_0$ , qui dépendent seulement de  $\lambda$  et de la géométrie de  $X$ , telles que pour tout  $k \geq k_0$ , on a  $M_{p,k} \leq M^{p+1} \cdot M_{p,k}^X$ .

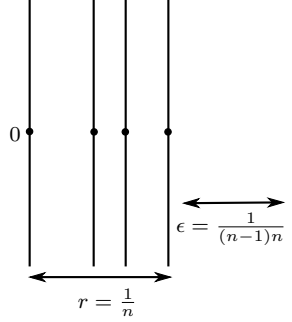


FIGURE 4.3. Soit  $X = \overline{\{1/n : n \geq 1\}} \times [0, 1]$ . La condition de séparation uniforme de composantes connexes n'est pas vérifiée. En effet, si  $\epsilon = 1/((n-1)n)$ , alors avec des  $\epsilon$ -chaînes on peut connecter 0 à tout le  $r$ -voisinage de  $\{0\} \times [0, 1]$ , où  $r = 1/n$ . Mais  $r/\epsilon \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ce comportement est interdit par la condition 2 du théorème.

La première chose à remarquer est que la condition sur la séparation uniforme des composantes connexes de  $X$ , condition 2, implique que les chemins de  $G_m$  sont à une distance comparable à  $10^{-m}$  de vraies courbes dans  $X$ .

En effet, on pose  $\epsilon_m := 2\lambda 10^{-m}$  pour chaque  $m \geq 1$ . Si  $B_z \sim B_w$  sont deux boules de  $\mathcal{U}_m$ , alors leurs centres vérifient  $d(z, w) < 2\lambda 10^{-m} = \epsilon_m$ . Donc si  $\gamma = \{z_j\}_{j=1}^N$  est un chemin de  $G_m$ , les  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , appartiennent à une même  $\epsilon_m$ -classe  $W$  de  $X$ . Comme  $h(\epsilon_m) \leq C_s \cdot \epsilon_m$ , il existe une composante connexe  $Y$  de  $X$  telle que  $W \subset V_{C_s \epsilon_m}(Y)$ . Cela implique que le chemin  $\gamma$  est contenu intégralement dans  $W \subset V_{\epsilon_m}(Y)$ .

Donc, pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , il existe  $y_j \in Y$  tel que  $d(y_j, z_j) < C_s \cdot \epsilon_m$ . En particulier, on a  $d(y_j, y_{j+1}) < 3C_s \epsilon_m$ , et comme  $Y$  est  $C_\ell$ -linéairement connexe il existe une courbe  $\gamma_j$  contenue dans  $Y$  qui joint  $y_j$  à  $y_{j+1}$  et de diamètre majoré par  $3C_\ell C_s \epsilon_m$ . On note  $K := 3C_\ell C_s$ . Soit  $\zeta_\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_{N-1}$  la concaténation des courbes  $\gamma_j$ . On note  $\zeta_\gamma(1) = y_1$  et  $\zeta_\gamma(2) = y_N$ .

Soient  $i, k \geq 1$ ,  $x \in X_i$ , et soit  $\hat{\rho}_x : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de poids qui est  $\Gamma_i(x)$ -admissible et telle que

$$\sum_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \hat{\rho}_x(B)^p = \text{Mod}_p(\Gamma_i(x), \mathcal{U}_{i+k}). \quad (4.3.5)$$

On suppose que  $\gamma = \{z_j\}_{j=1}^N$  est un chemin de  $G_{i+k}$  qui vérifie que  $z_1$  appartient à  $B_x$ ,  $z_j$  appartient à  $(L+1)B_x$  pour  $j = 2, \dots, N-1$  et que  $z_N$  n'appartient pas à  $(L+1)B_x$ . Soit  $\zeta_\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_{N-1}$  la courbe construite ci-dessus. Comme

$d(z_1, \zeta_\gamma(1)) \leq K \cdot \epsilon_{i+k}$ , on a

$$d(\zeta_\gamma(1), x) \leq d(z_1, x) + K \cdot \epsilon_{i+k} \leq 10^{-i} \left( 1 + \frac{2\lambda K}{10^k} \right).$$

Alors  $\zeta_\gamma \cap \ell \cdot B_x \neq \emptyset$  si  $k \geq k_0$ , où  $k_0$  est le plus petit entier tel que  $k_0 \geq \log_{10}(2\lambda K) + 1$ . Aussi comme

$$d(\zeta_\gamma(2), x) \geq d(z_N, x) - d(\zeta_\gamma(2), z_N) \geq \left( L + 1 - \frac{2\lambda K}{10^k} \right) 10^{-i} > L 10^{-i},$$

on a  $\zeta_\gamma \cap X \setminus LB_x \neq \emptyset$ , et donc  $\zeta_\gamma \in \Gamma_i(x)$ . Pour tout point  $w$  de  $\gamma_j$  on a

$$d(z_j, w) \leq \text{diam} \gamma_j + K \epsilon_{i+k} \leq 2K \epsilon_{i+k} \leq \Lambda 10^{-(i+k)},$$

où  $\Lambda \geq 4\lambda K$  est une constante uniforme, qui dépend seulement de  $\lambda$ , de  $C_s$  et de  $C_\ell$ . On peut supposer  $\Lambda$  suffisamment grande, de telle manière que toute boule  $B_y$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  qui intersecte  $\gamma_j$  soit contenue dans  $\Lambda B_{z_j}$ . La même conclusion est vraie pour  $z_{j+1}$ . On définit  $\rho_x : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant

$$\rho_x(B_y) = \max \{ \hat{\rho}_x(B_z) : B_z \subset \Lambda B_y \}. \quad (4.3.6)$$

Comme la quantité des boules  $B_z$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  qui sont contenues dans  $\Lambda B_y$  est majorée par une constante  $M$ , qui dépend seulement de  $\Lambda$  et de la constante de doublement  $C_D$ , on a

$$\rho_x(B_{z_j}) \geq \frac{1}{M} \sum_{B_z \cap \gamma_j \neq \emptyset} \hat{\rho}_x(B_z). \quad (4.3.7)$$

Donc on obtient

$$\sum_{j=1}^N \rho_x(B_{z_j}) \geq \frac{1}{M} \sum_{B_z \cap \zeta \neq \emptyset} \hat{\rho}_x(B_z) \geq \frac{1}{M}. \quad (4.3.8)$$

De l'autre côté, on prend  $M$  suffisamment grande, de sorte que la quantité des boules  $B_y$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  telles que  $\Lambda B_y$  contient  $B_z$ , soit aussi majorée par  $M$  pour chaque boule  $B_z$  de  $\mathcal{U}_{i+k}$  ( $M$  continue à dépendre seulement de  $\Lambda$  et de la constante de doublement). Alors le  $p$ -volume est majoré par

$$\begin{aligned} \sum_{B_y \in \mathcal{U}_{i+k}} \rho_x(B_y)^p &= \sum_{B_y \in \mathcal{U}_{i+k}} \max \{ \hat{\rho}_x(B_z)^p : B_z \subset \Lambda B_y \} \\ &\leq \sum_{B_y \in \mathcal{U}_{i+k}} \sum_{B_z \subset \Lambda B_y} \hat{\rho}_x(B_z)^p \leq M \cdot \sum_{B_z \in \mathcal{U}_{i+k}} \hat{\rho}_x(B_z)^p \\ &= M \cdot \text{Mod}_p(\Gamma_i(x), \mathcal{U}_{i+k}), \end{aligned}$$

C'est-à-dire, si on multiplie  $\rho_x$  par  $M$ , on obtient une fonction de poids, qui est  $\Gamma_{i,k}(x)$ -admissible et dont le  $p$ -volume est majoré par  $K \cdot \text{Mod}_p(\Gamma_i(x), \mathcal{U}_{i+k})$ , où

$K := M^{p+1}$ . Donc  $\text{Mod}_p(\Gamma_{i,k}(x), G_{i+k}) \leq K \cdot \text{Mod}_p(\Gamma_i(x), \mathcal{U}_{i+k})$ . Cela finit la preuve du théorème.  $\square$

**3.2. Le cas quasi-autosimilaire.** Dans cette partie, on montre que dans le cas quasi-autosimilaire, on peut simplifier la définition de  $Q_X$  en utilisant une famille de courbes de diamètre minoré. On rappelle (voir Définition 2.6) que  $X$  est  $L$ -quasi-autosimilaire si pour tout  $0 < r \leq \text{diam} X$  et pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U \subset X$  avec  $\text{diam} U \geq c_0$ , et une application  $\phi : (B(x, r), \frac{d}{r}) \rightarrow (U, d)$  bi-Lipschitz de constante  $L_0$ . Cette définition implique que  $X$  est uniformément parfait, doublant et que si  $X$  est connexe et localement connexe alors  $X$  est LC (voir le Chapitre 2).

La définition suivante apparaît dans [BouK10] et [HP08]. Pour  $\delta > 0$ , on note  $\Gamma_\delta = \{\gamma \subset X : \text{diam} \gamma \geq \delta\}$  et soit  $N_{p,k}(\delta) := \text{Mod}_p(\Gamma_\delta, \mathcal{U}_k)$ . Pour les preuves des affirmations qui suivent, voir [BouK10] section 3. La suite  $\{N_{p,k}\}_k$  partage les mêmes propriétés que  $M_{p,k}^X$ . En effet, la suite  $\{N_{p,k}\}_k$  vérifie l'inégalité sous-multiplicative : il existe une constante uniforme  $C$ , qui dépend seulement de  $p$ , de  $\delta$  et de la constante de doublement, telle que pour toute paire d'entiers  $k, l$  on a

$$N_{p,k+l} \leq C \cdot N_{p,k} \cdot N_{p,l}. \quad (4.3.9)$$

De manière analogue, cette propriété de sous-multiplicativité a la conséquence suivante : il existe  $\epsilon_\delta > 0$ , qui dépend seulement de  $\delta$  et de la constante de doublement, tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N_{p,k}(\delta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \text{ tel que } N_{p,k}(\delta) < \epsilon_\delta. \quad (4.3.10)$$

Donc l'ensemble des  $p > 0$  tels que  $N_{p,k}(\delta) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$  est un intervalle ouvert. On peut définir *l'exposant critique à grande échelle* de  $X$  par

$$Q_D(\delta) = \inf \{p > 0 : N_{p,k}(\delta) \rightarrow 0, \text{ quand } k \rightarrow +\infty\}. \quad (4.3.11)$$

D'après [HP08] Corollaire 3.3, on a  $Q_D(\delta) \leq \dim_{AR} X$ , pour tout  $\delta > 0$ . En particulier, comme  $X$  est uniformément parfait et doublant, on a  $Q_D(\delta) < +\infty$ . Soit  $L_0$  la constante de Lipschitz dans la définition d'autosimilitude.

**PROPOSITION 4.15.** *Soit  $X$   $L$ -quasi-autosimilaire. Il existe  $\delta_0 > 0$ , qui dépend seulement de la constante  $L_0$ , tel que si  $0 < \delta \leq \delta_0$  alors  $Q_X \leq Q_D(\delta)$ .*

**DÉMONSTRATION.** On utilise pour la démonstration divers ingrédients tirés de [BouK10] section 3. On choisit  $0 < \delta \leq \frac{1}{6L_0}$ . Soit  $p > 0$  tel que  $N_{p,k}(\delta) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Soit  $k \geq 1$ , et soit  $\rho : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de poids  $\Gamma_\delta$ -admissible minimale, c'est-à-dire, telle que  $\text{Vol}_p(\rho) = \text{Mod}_p(\Gamma_\delta, \mathcal{U}_k) = N_{p,k}(\delta)$ .

Soit  $L \geq 2$ . Pour  $i \geq 1$  et  $x \in X_i$ , on considère  $\phi : (L+1)B_x \rightarrow U$  l'application donnée par la définition d'autosimilitude de  $X$ . On note

$$Q(x) = \{B_y \in \mathcal{U}_{i+k} : B_y \subset (L+1)B_x\}.$$

On peut prendre  $B'_y := \phi(B_y)$  pour toute boule  $B_y$  de  $Q(x)$ . Comme l'application  $\phi$  est un homéomorphisme  $L_0$ -bi-Lipschitz de  $((L+1)B_x, \frac{d}{L^{10-i}})$  dans  $U$ , pour toute boule  $B_y$  de  $Q(x)$  on a :

$$B\left(\phi(y), \frac{1}{2(L+1)L_0}10^{-k}\right) \subset \phi\left(\frac{1}{2}B_y\right) \subset B'_y \subset B\left(\phi(y), \frac{L_0}{L+1}10^{-k}\right).$$

Comme aussi les boules  $\left\{B\left(\phi(y), \frac{1}{2(L+1)L_0}a^{-1}\right)\right\}_{B_y \in Q(x)}$  sont deux à deux disjointes, cela implique qu'il existe une constante  $K \geq 1$ , qui dépend seulement de  $L$ , de  $L_0$  et de la constante de doublement, telle que :

$$\forall B_z \in \mathcal{U}_k : |\{B_y \in Q(x) : B'_y \cap B_z \neq \emptyset\}| \leq K. \quad (4.3.12)$$

On définit  $\sigma : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$\sigma(B_y) = \begin{cases} \max\{\rho(B_z) : B_z \cap B'_y \neq \emptyset\} & \text{si } B_y \in Q(x). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{B_y \in \mathcal{U}_{i+k}} \sigma(B_y)^p &= \sum_{B_y \in Q(x)} \sigma(B_y)^p \leq \sum_{B_y \in Q(x)} \sum_{B_z \cap B'_y \neq \emptyset} \rho(B_z)^p \\ &\leq K \sum_{B_z \in \mathcal{U}_k} \rho(B_z)^p = K \cdot \text{Mod}_p(\Gamma_\delta, \mathcal{U}_k). \end{aligned}$$

On rappelle que  $\ell = 11/10$  vient de la Définition 4.13. Soit  $\gamma \subset X$  une courbe telle que  $\gamma \cap \ell \cdot B_x \neq \emptyset$  et  $\gamma \cap X \setminus LB_x \neq \emptyset$ . On peut supposer que  $\gamma$  est contenue dans  $L\overline{B_x}$ . Comme le diamètre de  $\gamma$  est minoré par  $(L-\ell)10^{-i}$ , le diamètre de  $\phi(\gamma)$  est minoré par  $\frac{L-\ell}{(L+1)L_0} \geq \frac{1}{6L_0} \geq \delta$ . Donc  $\phi(\gamma)$  est une courbe de  $\Gamma_\delta$  et

$$\sum_{B_z \cap \phi(\gamma) \neq \emptyset} \rho(z) \geq 1.$$

La boule  $B_y$  appartient à  $Q(x)$  si  $B_y \cap L\overline{B_x} \neq \emptyset$ . Alors il existe une boule  $B_y$  de  $Q(x)$  telle que  $B_z \cap B'_y \cap \phi(\gamma) \neq \emptyset$ , pour toute boule  $B_z$  de  $\mathcal{U}_k$  qui intersecte  $\phi(\gamma)$ . Donc, pour toute boule  $B_z$  de  $\mathcal{U}_k(\phi(\gamma))$ , il existe une boule  $B_{y_z}$  de  $\mathcal{U}_{i+k}(\gamma)$  telle que  $\rho(B_z) \leq \sigma(B_{y_z})$ .

On peut supposer  $K$  suffisamment grand de sorte que

$$\forall B_y \in \mathcal{U}_{i+k}(\gamma), \quad |\{B_z \in \mathcal{U}_k(\phi(\gamma)) : y_z = y\}| \leq K,$$

puisque cette quantité dépend seulement de la constante de doublement. Alors

$$1 \leq \sum_{B_z \in \mathcal{U}_k(\phi(\gamma))} \rho(B_z) \leq \sum_{B_z \in \mathcal{U}_k(\phi(\gamma))} \sigma(B_{y_z}) \leq K_1 \sum_{B_y \in \mathcal{U}_{i+k}(\gamma)} \sigma(B_y).$$

Cela montre que  $M_{p,k}^X(L) \leq K^{1+p} N_{p,k}(\delta)$ , et donc  $M_{p,k}^X(L) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

Le corollaire suivant montre que pour estimer la dimension conforme Ahlfors régulière d'un espace  $L$ -quasi-autosimilaire, il suffit de regarder le module des courbes de diamètre minoré. Signalons que ce théorème a été annoncé depuis quelque temps par S. Keith et B. Kleiner (voir la Remarque 2 d'après le Corollaire 3.7 de [BouK10]).

**COROLLAIRE 4.16** (Keith-Kleiner). *Soit  $X$  compact et  $L$ -quasi-autosimilaire. Si  $X$  vérifie les points 1 et 2 du Théorème 4.14, alors  $\dim_{AR} X = Q_D(\delta)$  pour tout  $0 < \delta \leq \delta_0$ . Ceci est le cas en particulier si  $X$  est connexe et localement connexe.*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $Q_X \leq Q_D \leq \dim_{AR} X$  il suffit de montrer que  $Q_X = \dim_{AR} X$ , mais ceci est vrai d'après le Théorème 4.14.  $\square$

On dit que le diamètre des composantes connexes de  $X$  tend vers zéro, si pour tout  $\delta > 0$ , il existe seulement une quantité finie de composantes connexes de  $X$  qui ont diamètre plus grand ou égal à  $\delta$ . On définit par convention la dimension conforme AR d'un point comme étant zéro.

**COROLLAIRE 4.17.** *Soit  $X$   $L$ -quasi-autosimilaire qui vérifie les hypothèses 1 et 2 du Théorème 4.14. Supposons que le diamètre des composantes connexes de  $X$  tend vers zéro. Alors*

$$\dim_{AR} X = \sup \{ \dim_{AR} Y : Y \text{ composante connexe de } X \}.$$

**DÉMONSTRATION.** On remarque que  $\dim_{AR} X \geq \dim_{AR} Y$  pour toute composante connexe  $Y$  de  $X$ . En effet, si  $Y$  est un point l'inégalité est triviale, et sinon comme  $Y$  est aussi uniformément parfait et doublant, la dimension conforme AR est égale à la dimension conforme de Assouad. Dans ce cas l'inégalité est claire.

On montre l'autre inégalité. On note

$$Q := \sup \{ \dim_{AR} Y : Y \text{ composante connexe de } X \},$$



et soit  $p > Q$ . On peut supposer que  $Q \geq 1$ , sinon, toute composante est triviale et comme  $X$  vérifie la séparation uniforme de composantes, il est uniformément discontinu. Dans ce cas,  $Q = \dim_{AR} X = 0$ .

On sait qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\dim_{AR} X = Q_D(\delta)$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{Y}$  des composantes connexes de  $X$  qui ont diamètre plus grand que  $\delta$ . Par hypothèses,  $\mathcal{Y}$  est fini et on note son cardinal par

$$N_\delta := |\mathcal{Y}|.$$

Si  $Y$  est une composante de  $X$ , on note  $\Gamma_\delta(Y)$  les courbes de  $\Gamma_\delta$  qui sont contenues dans  $Y$ . Donc on a

$$\Gamma_\delta = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \Gamma_\delta(Y),$$

et par conséquent, pour tout  $k \geq 1$  on a

$$\text{Mod}_p(\Gamma_\delta, \mathcal{U}_k) \leq \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \text{Mod}_p(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{U}_k) \leq N_\delta \cdot \max_{Y \in \mathcal{Y}} \{\text{Mod}_p(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{U}_k)\}.$$

Si on note  $\mathcal{U}_k(Y)$  les boules  $B$  de  $\mathcal{U}_k$  qui intersectent  $Y$ , on a l'égalité suivante

$$\text{Mod}_p(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{U}_k) = \text{Mod}_p(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{U}_k(Y)).$$

On fixe maintenant  $Y \in \mathcal{Y}$ . Pour chaque boule  $B = B_k(x)$  de  $\mathcal{U}_k(Y)$ , on considère un point  $x' \in B \cap Y$  et  $B' = B(x', 2 \cdot 10^{-k})$  la boule centrée en  $x'$  de rayon double ; si le point  $x$  appartient déjà à  $Y$  on choisit  $x' = x$ .

Soit  $\mathcal{W}_k$  le recouvrement de  $Y$  par ces boules-ci. D'après la Proposition B.2 de [Haïss09], la suite de modules  $\text{Mod}_p(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{W}_k)$  tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini. Comme

$$\text{Mod}(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{U}_k(Y)) \lesssim \text{Mod}_p(\Gamma_\delta(Y), \mathcal{W}_k),$$

où la constante de comparaison dépend seulement de la constante de doublement de  $X$ , et comme le cardinal de  $\mathcal{Y}$  est fini, on obtient  $\text{Mod}_p(\Gamma_\delta, \mathcal{U}_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Et donc  $\dim_{AR} X \leq p$ . Ceci finit la démonstration du corollaire.  $\square$

REMARQUE. L'hypothèse de finitude des composantes connexes de diamètre minoré est nécessaire comme le montre bien l'exemple du Cantor de segments  $X := \mathcal{C}_3 \times [0, 1]$ , dont la dimension conforme AR est égale à  $1 + \dim_H \mathcal{C}_3 = 1 + \log_3(2) > 1$ , bien que la dimension conforme AR des composantes connexes de  $X$  est égale à 1.

## CHAPITRE 5

### Points de coupure locale et dimension conforme

Dans cette partie on donne des conditions sur  $X$  qui impliquent que la dimension conforme Ahlfors régulière de  $X$  est égale à 1. Dans la suite on suppose  $X$  connexe. Ces conditions sont données en termes de points de coupure locale : une première condition, la définition 5.1, est suffisante pour le cas quasi-autosimilaire, mais pour les cas général, on doit utiliser la condition plus forte donnée dans la définition 5.7, qui est une version uniforme par rapport à l'échelle de 5.1. Dans la section 1, on montre que ces conditions impliquent la connexité locale de  $X$ , et on donne une version locale de cette condition en termes de fibres. Puis dans la section 2 on prouve le critère général de dimension 1 (Proposition 5.9).

#### 1. Points de coupure locale bien répartis

**1.1. Points de coupure locale et connexité locale.** On a besoin de quelques définitions. Si  $P_n \subset X$  est un ensemble fini, on note  $\mathcal{Y}_n$  l'ensemble des composantes connexes de  $X \setminus P_n$ . On dit que  $x \in X$  est un *point de coupure locale* s'il existe un ouvert connexe  $x \in U \subset X$  tel que  $U \setminus \{x\}$  n'est pas connexe.

**DÉFINITION 5.1.** *Soit  $X$  un espace métrique connexe et compact. On dit que  $X$  a des points de coupure locale bien répartis (BR) s'il vérifie la propriété suivante : il existe une suite d'ensembles finis  $P_n \subset X$  telle que  $X \setminus P_n$  n'est pas connexe et*

$$\delta_n = \sup \{ \text{diam} A : A \in \mathcal{Y}_n \} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.1.1)$$

**REMARQUES.**

- La propriété BR peut s'énoncer sans utiliser de métrique, uniquement avec la structure uniforme du compact  $X$ . Mais en fait, l'existence de la suite d'ensembles  $\{P_n\}_n$  implique que  $X$  est séparable et donc métrisable.
- On supposera la suite  $\{P_n\}_n$  croissante.

On montre que la propriété BR implique que  $X$  est localement connexe. On note  $\mathcal{Y}_n(\delta) = \{Y \in \mathcal{Y}_n : \text{diam} Y \geq \delta\}$  pour  $\delta > 0$ . On remarque que, même si  $|\mathcal{Y}_n| = +\infty$  est possible, pour tout  $\delta > 0$ , on a  $|\mathcal{Y}_n(\delta)| < +\infty$ . En effet, si  $m$  est assez grand de sorte que  $\delta_m < \delta$ , alors  $Y \cap P_m \neq \emptyset$  pour toute composante  $Y \in \mathcal{Y}_n(\delta)$ , et donc

$|\mathcal{Y}_n(\delta)| \leq |P_m|$ . Cela implique que si  $\{Y_m\}_m$  est une suite de composantes connexes différentes dans  $\mathcal{Y}_n$ , on a nécessairement

$$\text{diam} Y_m \rightarrow 0, \text{ quand } m \rightarrow +\infty. \quad (5.1.2)$$

PROPOSITION 5.2. *Si  $X$  vérifie BR alors  $X$  est localement connexe. De plus, comme  $X$  est compact, cela implique que  $X$  est connexe par arcs.*

On a besoin du lemme suivant pour prouver la proposition.

LEMME 5.3. *Si  $X$  vérifie BR alors  $\bar{Y} \cap P_n \neq \emptyset$  pour tout  $Y \in \mathcal{Y}_n$ .*

DÉMONSTRATION DU LEMME. On note  $\mathcal{B} = \{Y \in \mathcal{Y}_n : \bar{Y} \cap P_n \neq \emptyset\}$ . On doit montrer que  $\mathcal{B} = \mathcal{Y}_n$ . Si  $Y \in \mathcal{Y}_n$ , comme  $Y$  est fermée dans  $X \setminus P_n$  on a  $\bar{Y} \subset Y \cup P_n$ . Par suite,  $\bar{Y} = Y$  (et donc  $Y$  est compact dans  $X$ ) si  $Y \notin \mathcal{B}$ . Montrons que l'ensemble  $B = P_n \cup \bigcup \{Y : Y \in \mathcal{B}\}$  est compact. Soit  $(x_m) \in B$  qui tend vers  $x \in X$ . On peut supposer que  $x \notin P_n$ . Donc  $x_m \notin P_n$  pour  $m$  assez grand, et on note  $Y_m \in \mathcal{B}$  la composante telle que  $x_m \in Y_m$ . Soit  $Y \in \mathcal{Y}_n$  telle que  $x \in Y$ , et supposons que  $Y \notin \mathcal{B}$ . Il existe une sous-suite  $m \rightarrow +\infty$  telle que les  $Y_m$  sont toutes différentes, car une composante de  $\mathcal{Y}_n$  ne peut pas accumuler une autre. Soit  $c = \text{dist}(Y, P_n) > 0$ , alors  $\text{diam} Y_m \geq \frac{c}{2}$  pour  $m$  assez grand, qui est une contradiction.

Supposons qu'il existe  $Y \notin \mathcal{B}$ . Alors  $\text{dist}(Y, B) = d > 0$  car  $Y$  et  $B$  sont des compacts disjoints. Pour  $0 < r < d$ , on note  $\bar{V}_r$  le  $r$ -voisinage fermé de  $Y$  et  $V_r$  le  $r$ -voisinage ouvert. On considère le compact  $F = \bar{V}_{d/2} \setminus V_{d/4}$ . Alors il n'existe pas de sous-ensemble connexe  $E$  de  $\bar{V}_{d/2}$  qui intersecte les deux,  $Y$  et  $F$  : car un tel ensemble ne coupe pas  $P_n$  et donc  $Y \cup E$  est un ensemble connexe contenu dans  $X \setminus P_n$  qui contient strictement  $Y$ , ce qui est impossible.

Ceci implique qu'il existe  $\eta > 0$  suffisamment petit tel que : aucun point de  $Y$  ne peut se connecter par une  $\eta$ -chaîne contenue dans  $\bar{V}_{d/2}$  à un point de  $F$ . En effet, supposons que pour tout  $k \geq 1$  il existe une  $1/k$ -chaîne  $x_1(k), \dots, x_{N_k}(k)$  avec  $x(k) := x_1(k) \in Y$  et  $y(k) := x_{N_k}(k) \in F$ . Comme  $Y$  et  $F$  sont compacts, il existe une sous-suite  $k_i$  telle que  $x(k_i)$  tend vers un point  $x \in Y$  et  $y(k_i)$  tend vers un point  $y \in F$ . Les points  $x$  et  $y$  sont connectés par une  $\epsilon$ -chaîne dans  $\bar{V}_{d/2}$ , pour tout  $\epsilon > 0$ . Mais alors il existe un ensemble connexe  $E$  contenu dans  $\bar{V}_{d/2}$  tel que  $x, y \in E$ , ceci est une contradiction.

Si  $\eta$  est suffisamment petit, toute  $\eta$ -chaîne qui intersecte  $V_{d/4}$  et  $X \setminus \bar{V}_{d/2}$  doit couper  $F$ . Comme tout point de  $Y$  peut se connecter par une  $\eta$ -chaîne à un point de  $P_n$  (car  $X$  est connexe), en considérant la première fois qu'une telle chaîne passe par  $F$ , on obtient une  $\eta$ -chaîne contenue dans  $\bar{V}_{d/2}$  qui connecte  $Y$  à  $F$ . Mais cela est une contradiction qui finit la preuve du lemme.  $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2. Supposons que  $X$  vérifie BR. Alors d'après le Lemme 5.3 on peut dire que  $\overline{Y} \cap P_n \neq \emptyset$  pour toute  $Y \in \mathcal{Y}_n$ . Soient  $x \in X$  et  $\varepsilon > 0$ . On prend  $n \geq 1$  de sorte que  $\delta_n < \varepsilon/2$ . Soit

$$U = \bigcup \{Y : Y \in \mathcal{Y}_n, x \in \overline{Y}\} \cup \{x\}.$$

L'ensemble  $Y \cup \{x\}$  est connexe car  $Y \subset Y \cup \{x\} \subset \overline{Y}$ , et donc  $U$  est connexe. De plus,  $U$  contient  $x$  dans son intérieur. En effet, soit  $d = \min\{d(y, x) : y \neq x \in P_n\}$  et soit  $\{x_m\}_m$  une suite hors de  $U$  qui tend vers  $x$ . Soit  $Y_m \in \mathcal{Y}_n$  telle que  $x_m \in Y_m$ . Alors comme  $x \notin \overline{Y_m}$  et  $\overline{Y_m} \cap P_n \neq \emptyset$ , pour  $m$  assez grand on a  $\text{diam} Y_m \geq \frac{d}{2}$ , ce qui est impossible. Comme  $\text{diam} U \leq 2\delta_n < \varepsilon$ , on obtient la connexité locale.  $\square$

REMARQUE. On peut supposer que les points des ensembles  $P_n$  (de la Définition 5.1) sont des points de coupure locale. En effet, soit  $P^*$  les points de  $P := \bigcup_n P_n$  qui ne sont pas des points de coupure locale. On note aussi  $P_n^* = P^* \cap P_n$  et  $\hat{P}_n = P_n \setminus P^* = P_n \setminus P_n^*$ . Soit  $Y$  une composante connexe de  $X \setminus P_n$ . Alors il existe une composante  $Y^*$  de  $X \setminus \hat{P}_n$  telle que  $Y \subset Y^*$ . Soient  $x, y \in Y^* \setminus P_n^*$  et soit  $\gamma$  une courbe contenue dans  $Y^*$  qui joint  $x$  et  $y$  (cette courbe existe car  $X$  est localement connexe et  $\hat{P}_n$  est fini, donc  $Y^*$  est connexe par arcs). On note  $\{z_1, \dots, z_m\} := \gamma \cap P_n^*$ . Comme  $X$  est localement connexe, on peut trouver  $U_1, \dots, U_m$  des ouverts connexes disjoints, contenus dans  $Y^*$ , avec  $U_i \cap P_n^* = z_i$  (on remarque que  $P_n^*$  est fini). Finalement, on note  $\overline{B}_i \subset U_i$  une petite boule fermée centrée en  $z_i$  et on note aussi  $a_i$  et  $b_i$  le premier et le dernier point de  $\gamma$  qui appartiennent à  $\overline{B}_i$  respectivement. Comme les points  $z_1, \dots, z_m$  ne sont pas de points de coupure locale, pour chaque  $i$  il existe une courbe  $\sigma_i$  qui joint  $a_i$  et  $b_i$  dans  $U_i \setminus \{z_i\}$ . A partir de  $\gamma$  et les courbes  $\sigma_i$  on peut construire une courbe  $\gamma'$  contenue dans  $Y^* \setminus P_n^*$  qui joint  $x$  et  $y$ . Cela implique que  $Y^* = Y \cup (P_n^* \cap Y^*)$  et en particulier que  $\text{diam} Y = \text{diam} Y^*$ . Réciproquement, en prenant une composante  $Y^*$  de  $X \setminus \hat{P}_n$  quelconque, le même argument montre qu'il existe une composante  $Y$  de  $X \setminus P_n$  telle que  $Y^* = Y \cup (P_n^* \cap Y^*)$ . Donc on obtient

$$\sup_{Y^*} \text{diam} Y^* = \sup_Y \text{diam} Y = \delta_n.$$

Alors on peut remplacer  $P_n$  par  $\hat{P}_n$  dans la Définition 5.1. Cela justifie la terminologie utilisée dans la définition de BR.

**1.2. Une version locale : les fibres.** On finit cette partie en donnant une version locale de la propriété BR quand  $X$  est localement connexe. On commence par un lemme général. Soit  $X$  un espace métrique compact et localement connexe. Soit  $P$  un sous-ensemble dénombrable de  $X$ . Pour chaque  $x \in X$ , on définit l'ensemble

$P(x)$  des points  $y$  de  $X$  tels que  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe de  $X \setminus F$ , pour tout sous-ensemble fini  $F$  de  $P$  tel que  $x \notin F$  et  $y \notin F$ . On appelle  $P(x)$  la  $P$ -fibre de  $x$ .

Si  $X$  vérifie BR, on peut considérer pour  $P$  la réunion des ensembles de points de coupure locale  $P_n$  donnés par la Définition 5.1. Dans ce cas, toutes les fibres sont triviales. Dans les énoncés qui suivent, on montre la réciproque.

LEMME 5.4. *Soit  $x$  un point de  $X$ . Supposons que  $P(x) = \{x\}$ , alors pour tout rayon  $r \in (0, \text{diam}X)$ , il existe un ouvert connexe  $U$  qui contient  $x$ , qui est contenu dans la boule  $B(x, r)$  et dont son bord est un sous-ensemble fini de  $P$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $P$  est dénombrable, on peut l'ordonner  $P = \{p_n : n \geq 0\}$ . Si  $x \in P$ , on choisit  $p_0 = x$ . Pour chaque  $n \geq 0$  on pose  $P_n = \{p_i : 0 \leq i \leq n\}$  et  $P_n^* = P_n \setminus \{p_0\}$  (dans ce cas pour  $n \geq 1$ ). Selon que  $x$  appartienne à  $P$  ou non, on définit  $U_n$  la composante connexe de  $X \setminus P_n$  qui contient  $x$ , ou la composante connexe de  $X \setminus P_n^*$  qui contient  $x$ .

Alors  $\{U_n\}$  est une suite décroissante d'ouverts connexes qui contiennent  $x$ . Comme  $P(x) = \{x\}$ , on a  $\bigcap_n U_n = \{x\}$ . En effet, soit  $y$  un point de  $X$  différent de  $x$ , alors il existe un sous-ensemble fini  $F$  de  $P$ , qui ne contient pas  $x$  ni  $y$ , et tel que si  $V$  désigne la composante connexe de  $X \setminus F$  qui contient  $x$ , alors  $y \notin V$ . Soit  $n$  suffisamment grand de sorte que  $F \subset P_n$ , alors  $U_n \subset V$  et donc  $y \notin U_n$ .

Pour chaque  $n$ , le bord de  $U_n$  est fini et est contenu dans  $P_n$ . On affirme que  $\bigcap_n \overline{U_n} = \bigcap_n U_n$ . En effet, soit  $n$  quelconque. Le bord  $\partial U_n = \{y_1, \dots, y_N\}$  est fini, et donc il existe des ensembles finis  $F_i \subset P$ , tels que pour chaque  $i$ ,  $y_i$  et  $x$  n'appartiennent pas à  $F_i$  et si  $U_i$  désigne la composante connexe de  $X \setminus F_i$  qui contient  $x$ , alors  $y_i \notin U_i$ . Soit  $m \geq n$  suffisamment grand de sorte que  $F_i \subset P_m$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . Pour chaque  $i$ , on note  $V_i$  la composante connexe de  $X \setminus P_m$  qui contient  $y_i$ . Comme  $V_i \cap U_m = \emptyset$ , on a  $y_i \notin \overline{U_m}$ . Ceci implique  $\overline{U_m} \subset U_n$ , et donc montre l'affirmation.

Par suite,  $\{\overline{U_n}\}_n$  est une suite décroissante de compacts tels que  $\bigcap_n \overline{U_n} = \{x\}$ . Donc  $\text{diam} \overline{U_n}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. En particulier, étant donné  $r \in (0, \text{diam}X)$ , pour  $n$  suffisamment grand on a  $\overline{U_n} \subset B(x, r)$ . Ceci montre le lemme.  $\square$

COROLLAIRE 5.5. *Si pour tout  $x \in X$  on a  $P(x) = \{x\}$ , alors pour tout  $r \in (0, \text{diam}X)$  il existe un recouvrement ouvert fini  $\mathcal{U}$  de  $X$ , tel que pour tout ouvert  $U \in \mathcal{U}$  :*

- $\partial U$  est un sous-ensemble fini de  $P$  et

– il existe un point  $x \in X$  tel que  $U \subset B(x, r)$ .

En particulier  $X$  vérifie la propriété BR.

DÉMONSTRATION. Soit  $r \in (0, \text{diam}X)$ . Alors d'après le Lemme 5.4, pour chaque point  $x \in X$  il existe un ouvert  $U_x$  de  $X$  qui vérifie les deux points de l'énoncé du lemme. Donc le lemme est vrai par compacité de  $X$ . Enfin,  $X$  vérifie la propriété BR : considérons  $P_r$  la réunion des bords  $\partial U$  avec  $U \in \mathcal{U}$ . Alors  $P$  est un ensemble fini et toutes les composantes connexe de  $X \setminus P_r$  ont diamètre plus petit ou égal à  $2r$ .  $\square$

On obtient donc l'équivalence suivante.

THÉORÈME 5.6 (Fibres triviales équivalent à BR). *Soit  $X$  un espace métrique compact et connexe. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- $X$  vérifie la propriété BR,
- $X$  est localement connexe et il existe un sous-ensemble dénombrable  $P$  de  $X$  tel que pour tout  $x \in X$  la  $P$ -fibre de  $x$  est triviale ( $P(x) = \{x\}$ ).

## 2. Un critère général de dimension 1

Pour estimer la dimension conforme d'un espace qui a des points de coupure locale, on a besoin d'une borne uniforme par rapport à l'échelle sur la quantité de points qu'on utilise pour déconnecter l'espace. Plus précisément, on aura recours à la notion suivante.

DÉFINITION 5.7. *On dit qu'un espace métrique connexe et compact  $X$  a des points de coupure locale uniformément bien répartis (UBR), s'il vérifie la condition suivante : il existe une constante  $C \geq 1$  telle que quels que soient  $x \in X$  et  $r > 0$ , il existe un ensemble fini  $P \subset B(x, r)$  tel que :*

- (1)  $|P| \leq C$  et
- (2) aucune composante connexe de  $X \setminus P$  ne peut intersecter à la fois  $B(x, \frac{r}{2})$  et  $X \setminus \overline{B}(x, r)$ .

REMARQUE 1. La définition est équivalente à la suivante : il existe une fonction  $C : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tous  $x \in X$  et  $0 < s < r \leq \text{diam}X$ , il existe un ensemble fini  $P \subset B(x, r)$  de cardinal majoré par  $C(s/r)$  et tel qu'aucune composante connexe de  $X \setminus P$  ne peut intersecter à la fois  $B(x, s)$  et  $X \setminus \overline{B}(x, r)$ .

REMARQUE 2. Si  $X$  vérifie UBR alors  $X$  vérifie BR. En effet, soit  $\delta > 0$ . Soient  $x_1, \dots, x_N$  les centres d'un recouvrement fini par boules de rayon  $\delta/4$ . Pour chaque  $i = 1, \dots, N$  soit  $P_i \subset B(x_i, \frac{\delta}{2})$  donné par la définition 5.7, et soit  $P = \bigcup_{i=1}^N P_i$ .

Soit  $Y$  une composante connexe de  $X \setminus P$  et soit  $x_i$  tel que  $Y \cap B(x_i, \frac{\delta}{4}) \neq \emptyset$ . Alors  $Y \subset B(x_i, \frac{\delta}{2})$ , et donc  $\text{diam} Y \leq \delta$ .

LEMME 5.8. *Si  $X$  est un espace quasi-autosimilaire qui vérifie BR, alors il vérifie aussi la propriété UBR. Donc ces deux propriétés sont équivalentes pour les espaces quasi-autosimilaires.*

DÉMONSTRATION. Pour chaque  $x \in X$  et  $0 < r \leq \text{diam} X$ , il existe  $\phi : B(x, 2r) \rightarrow U \subset X$  homéomorphisme  $\eta$ -quasisymétrique donné par la Définition 2.1. Soit  $\{P_n\}$  la suite d'ensembles finis donnée par la Définition 5.1. On affirme qu'il existe  $n \geq 1$  tel que, pour tous  $x \in X$  et  $0 < r \leq \text{diam} X$ , aucune composante connexe de  $X \setminus R_n$  ne peut intersecter à la fois  $B(x, \frac{r}{2})$  et  $X \setminus \overline{B}(x, r)$ , où  $R_n := \phi^{-1}(P_n \cap U)$ . Ceci démontrerait que  $X$  vérifie UBR car le cardinal de  $R_n$  est majoré par celui de  $P_n$ .

Supposons par l'absurde que l'affirmation est fausse. Alors pour chaque  $n$  il existe  $x \in X$  et  $0 < r_n \leq \text{diam} X$  tels qu'il existe une composante connexe  $Y_n$  de  $X \setminus R_n$  qui intersecte  $B(x_n, r_n/2)$  et aussi  $X \setminus B(x_n, r_n)$ . Comme  $X$  est localement connexe et chaque  $R_n$  est fini, les composantes  $Y_n$  sont connexes par arcs. Soit  $\gamma_n$  une courbe contenue dans  $Y_n$  qui vérifie  $\gamma_n \cap B(x_n, r_n/2) \neq \emptyset$  et  $\gamma_n \cap X \setminus B(x_n, r_n) \neq \emptyset$ . Alors  $\text{diam} \gamma_n \geq r_n/2$ , et donc

$$\frac{\text{diam} \phi_n(\gamma_n)}{\text{diam} \phi(B(x_n, 2r_n))} \geq \frac{1}{2} \cdot \eta \left( \frac{\text{diam} B(x_n, 2r_n)}{\text{diam} \gamma_n} \right)^{-1} \geq \frac{1}{2\eta(8)} := \delta. \quad (5.2.1)$$

Les composantes connexes de  $X \setminus P_n$  ont leur diamètre majoré par  $\delta_n$  qui tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. En particulier, pour  $n$  est suffisamment grand,  $\phi_n(\gamma_n) \cap P_n \neq \emptyset$ . Mais ceci est une contradiction car  $\gamma_n \cap R_n = \emptyset$ . Cela finit la preuve.  $\square$

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante. B. Kleiner m'a informé qu'il avait aussi obtenu un résultat similaire avec S. Keith (non publié).

PROPOSITION 5.9. *Soit  $X$  un espace métrique compact et doublant. Si  $X$  vérifie LC et UBR alors  $\dim_{AR} X = 1$ .*

Avant de prouver cette proposition, on énonce le corollaire suivant pour les espaces quasi-autosimilaires. On remarque que dans ce cas, d'après la Proposition 5.2, on sait que si  $X$  vérifie BR alors il est localement connexe, et donc LC (on rappelle que pour un espace quasi-autosimilaire LC est équivalente à la connexité locale, voir la Proposition 2.9). C'est-à-dire, dans le cas quasi-autosimilaire la condition BR est équivalente à LC et UBR.

COROLLAIRE 5.10. *Soit  $X$  connexe et quasi-autosimilaire. Si  $X$  vérifie BR, alors  $\dim_{AR} X = 1$ .*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.9. D'après le Théorème 4.14, il s'agit de prouver que  $Q_X = 1$ . Pour ça, on remarque qu'il suffit de montrer que la suite  $\{M_{1,k}^X\}_k$  est bornée pour  $p = 1$ . En effet, soient  $x \in X$ ,  $0 < r < \text{diam} X$  et  $\Gamma(x, r)$  la famille des courbes de  $X$  qui joignent  $B(x, r)$  et  $X \setminus B(x, 2r)$ . Les mêmes arguments de la preuve du Lemme 4.4 montrent que si  $\{M_{1,k}^X\}_k$  est bornée, alors  $M_{1,k}^X(x, r) := \text{Mod}_1(\Gamma(x, r), \mathcal{U}_k)$ , est majoré par une constante indépendante de  $x \in X$  et  $r$  : il existe une constante  $C$  telle que

$$M_{1,k}^X(x, r) \leq C \text{ pour tout } x \in X, r > 0 \text{ et } k \text{ tel que } 10^{-k} < r.$$

Cela, d'après la Proposition 3.4 de [BouK10], implique que pour tout  $p > 1$  il existe une fonction positive et croissante  $\psi$  sur  $(0, \infty)$  vérifiant  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$ , telle que pour toute paire de continua disjoints et non-dégénérés  $A, B \subset X$ , et tout  $k$  tel que  $10^{-k} \leq \min\{\text{diam} A, \text{diam} B\}$ , on a

$$\text{Mod}_p(\Gamma, \mathcal{U}_k) \leq \psi(\Delta(A, B)^{-1}),$$

où  $\Gamma$  est la famille des courbes qui joignent  $A$  et  $B$ , et  $\Delta(A, B)$  est la distance relative de  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire,

$$\Delta(A, B) := \frac{\text{dist}(A, B)}{\min\{\text{diam} A, \text{diam} B\}}.$$

Finalement, cela implique (voir la preuve du Corollaire 3.7 (3) de [BouK10]) qu'il existe une suite de réels positifs  $\{\eta_k\}_k$  avec  $\eta_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$  (qui dépend seulement de la fonction  $\psi$ ), telle que pour tous  $i, k \geq 1$  et  $x \in X_i$ , si  $\rho_{i+k}^x : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction optimale pour  $\Gamma_i(x)$ , alors

$$\|\rho_{i+k}^x\|_\infty := \max_{B \in \mathcal{U}_{i+k}} \rho_{i+k}^x(B) \leq \eta_k.$$

Ici, on a utilisé les notations de la section 3.1 : on note  $\Gamma_i(x)$  la famille des courbes de  $X$  qui intersectent  $\overline{B}_i(x)$  et  $X \setminus 2 \cdot B_i(x)$ . Donc  $M_{p,k}^X \lesssim \eta_k^{p-1}$ , qui tend vers zéro quand  $k \rightarrow \infty$  pour tout  $p > 1$ , et donc  $Q_X = 1$ .

On montre maintenant que pour  $p = 1$  la suite  $\{M_{1,k}^X\}_k$  est bornée. Soient  $i, k \geq 1$  et  $x \in X_i$ . On note  $P = P(x) \subset 2 \cdot B_i(x)$  l'ensemble donné par la définition 5.7, qui vérifie que  $\gamma \cap P(x) \neq \emptyset$  pour toute  $\gamma \in \Gamma_i(x)$  et  $|P(x)| \leq C$ , où  $C$  est une constante uniforme. Soit

$$U(x) = \{B \in \mathcal{U}_{i+k} : B \cap P(x) \neq \emptyset\}.$$



On définit  $\sigma : \mathcal{U}_{i+k} \rightarrow \mathbb{R}_+$  comme

$$\sigma(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } B \in U(x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $\sigma$  est  $\Gamma_i(x)$ -admissible et  $\text{Vol}_1(\sigma) = |U(x)| \leq K \cdot |P(x)|$ , où  $K$  est une constante qui dépend seulement de la constante de doublement, on obtient

$$M_{1,k}^X \leq K \cdot \sup_{i \geq 1} \max_{x \in X_i} |P(x)| \leq K'.$$

Cela finit la preuve de la proposition.  $\square$

### 3. Des exemples

La condition BR est non vérifiée dès qu'il existe une quantité infinie de courbes disjointes dans l'espace qui sont de diamètre minoré. Du coup, il n'est pas difficile de trouver des exemples d'espaces de dimension conforme AR égale à 1 mais qui ne vérifient pas la propriété BR.

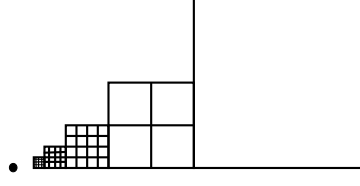
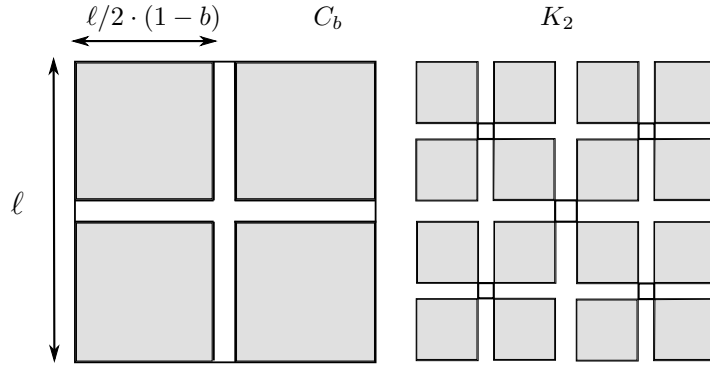
Cependant, dans cette section, on donne des exemples qui montrent que chacune des hypothèses LC et UBR sont dans un certain sens optimales. On construit un exemple d'un espace compact connexe qui vérifie BR et LC mais non UBR et qui a dimension conforme AR égale à 2, ainsi qu'un ensemble qui vérifie UBR mais non LC et qui a dimension conforme Ahlfors régulière égale à 2. Dans la construction du second exemple, on obtient aussi un ensemble de Cantor de dimension conforme AR deux. Ceci montre que la condition de séparation uniforme des composantes est aussi proche d'être optimale pour garantir  $Q_X = Q_N$ .

EXEMPLE 5.3.1. Pour chaque  $n \geq 0$ , soit  $C_n \subset \mathbb{R}^2$  un le carré de sommets

$$\left\{ \left( \frac{1}{2^n}, 0 \right), \left( \frac{1}{2^{n+1}}, 0 \right), \left( \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right), \left( \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right) \right\}.$$

Les côtés de  $C_n$  sont de longueur  $\ell_n = 1/2^{n+1}$ . Pour chaque  $n \geq 1$  soit  $D_n \subset [0, 1]$  les nombres dyadiques de la forme  $\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{k}{2^n \cdot \ell_n}$ . Pour chaque  $n \geq 1$  on rajoute à  $C_n$  les segments  $D_n \times [0, \ell_n]$  et  $[0, \ell_n] \times D_n$ , on appelle  $K_n$  cet ensemble. Soit  $X = \{0\} \cup \bigcup_{n \geq 0} K_n$ , voir la figure 5.1. Alors  $X$  est LC et BR, mais  $X$  ne vérifie pas UBR. De plus, comme  $\ell_n \cdot K_n$  converge pour la distance de Hausdorff vers le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$ , on voit que  $Q_X = Q_N = \dim_{AR} X = 2$ .

EXEMPLE 5.3.2. On commence par décrire une construction générale qu'on utilisera pour construire l'exemple par récurrence. Soient  $I, J \subset \mathbb{R}$  deux intervalles fermés de longueur  $\ell > 0$  et considérons le carré  $C = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ . Soient  $x \in I$  et

FIGURE 5.1. L'ensemble  $X$  de l'exemple 5.3.1.FIGURE 5.2. A gauche la construction de l'ensemble  $C_b$ . A droite la deuxième étape de la construction de  $K_\beta$ , c'est-à-dire l'ensemble  $K_2$ .

$y \in J$  les centres respectifs de ces intervalles; pour  $b \in (0, 1)$  on note  $I_b$  et  $J_b$  les intervalles ouverts, centrés en  $x$  et  $y$  respectivement, de longueur  $b\ell/2$ . On définit  $C_b \subset C$  l'ensemble donné par :

$$C_b := C \setminus (I_b \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times J_b). \quad (5.3.1)$$

Donc  $C_b$  est la réunion de quatre carrés fermés disjoints de longueur  $\ell/2 \cdot (1 - b)$ . On définit aussi

$$R_b(C) := \partial(I_b \times J_b). \quad (5.3.2)$$

Soit  $\beta = \{b_n\}_{n \geq 1}$  une suite de réels de  $(0, 1)$ , on construit deux compacts,  $K_\beta$  et  $Q_\beta$ , par récurrence de la façon suivante : soient  $K_0 = Q_0 := [0, 1]^2$  le carré unité; pour  $n \geq 1$  on définit  $Q_n \subset Q_{n-1}$  en appliquant (5.3.1) pour chaque carré de  $Q_{n-1}$  avec  $b = b_n$ , de sorte que  $Q_n$  est une réunion de carrés fermés de longueur  $\ell_n = 2^{-n} \cdot p_n$ , où

$$p_n := \prod_{i=1}^n (1 - b_i). \quad (5.3.3)$$

Soit  $R_n$  la réunion des  $R_{b_n}(C)$  (comme dans (5.3.2)) pour chaque carré  $C$  de  $Q_{n-1}$ . On définit aussi  $K_n$  comme étant

$$K_n := Q_n \cup \bigcup_{i=1}^n R_i, \quad (5.3.4)$$

de sorte que  $K_n$  est compact et connexe. On définit finalement

$$K_\beta := \bigcap_{n \geq 0} K_n \text{ et } Q_\beta := \bigcap_{n \geq 0} Q_n. \quad (5.3.5)$$

De cette façon  $Q_\beta$  est un ensemble de Cantor et  $K_\beta$  est un compact connexe qui contient  $Q_\beta$ . On choisit la suite  $\{b_n\}$  de sorte que  $b_n \rightarrow 0$  et  $p_n \rightarrow c > 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $C$  un carré de  $Q_n$  pour  $n \geq 0$ , alors les sommets de  $C$  appartiennent à  $Q_\beta$  et un de ces sommets est un point de coupure locale pour  $K_\beta$ , de sorte que toute courbe de  $K_\beta$  qui intersecte  $C$  et son complémentaire doit passer par ce sommet. Comme  $C \cap K_\beta$  est contenu dans une boule de rayon comparable à  $\ell_n$  (car  $p_n \rightarrow c > 0$ ) on voit que  $K_\beta$  vérifie UBR. Donc l'exposant critique  $Q_X$  de  $K_\beta$  est égal à 1. Par contre  $K_\beta$  n'est pas LC, et en effet la dimension conforme Ahlfors régulière de  $K_\beta$  est égale à 2. Pour prouver ceci, on montre qu'il existe un espace tangent de  $K_\beta$  qui contient le carré unité.

Soit  $s(\beta) := \{b_n\}_{n \geq 2}$  l'application de décalage. On remarque que si  $H_\alpha$  désigne l'homothétie de rapport  $\alpha$ , alors  $H_{\ell_1^{-1}}(K_\beta)$  contient  $K_{s(\beta)}$ . Donc si on note  $r_n = \ell_n \cdots \ell_1$ , alors  $H_{r_n^{-1}}(K_\beta)$  contient  $K_{s^n(\beta)}$ . Soit  $x = (0, 0) \in K_\beta$ , il suffit de montrer que  $K_{s^n(\beta)} \rightarrow [0, 1]^2$  dans la topologie de Hausdorff quand  $n \rightarrow \infty$ , pour montrer que l'espace tangent obtenu comme limite de  $(K_\beta, r_n^{-1}d, x)$  contient le carré unité. Cela est vrai car le  $\beta_n$ -voisinage de  $K_{s^n(\beta)}$  contient le carré unité et donc  $d_H(K_{s^n(\beta)}, [0, 1]^2) \leq \beta_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

On voit aussi que cela montre que l'ensemble de Cantor  $Q_\beta$  a dimension conforme Ahlfors régulière 2 et que son exposant critique est égal à zéro. Et donc on voit aussi qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de séparation des composantes connexes dans le Théorème 4.14.

## CHAPITRE 6

# Applications aux bords des groupes hyperboliques

### 1. Motivations

Les propriétés analytiques de la jauge conforme du bord d'un groupe hyperbolique sont en forte relation avec les propriétés géométriques du groupe. En particulier, tout invariant par quasisymétrie du bord, tel comme sa dimension conforme Ahlfors régulière (AR), est un invariant par quasi-isométrie du groupe. Comme on a vu dans l'Introduction, l'importance de cet invariant en relation à la conjecture de Cannon a été révélée par les travaux de M. Bonk et B. Kleiner [BouK10]. Sa bonne compréhension reste un objectif important dans l'étude de la géométrie du bord d'un groupe hyperbolique.

La dimension conforme AR du bord d'un groupe hyperbolique  $G$  est bornée inférieurement par sa dimension topologique. Si  $\dim_T \partial G = 0$ , alors  $G$  est virtuellement libre ([Dun85],[Sta68]), et  $\partial G$  est un ensemble de Cantor (quasi-autosimilaire) ou consiste en deux points. Dans ce cas, la dimension conforme AR de  $\partial G$  est égale à zéro, et celle-ci est atteinte si et seulement si  $G$  est virtuellement cyclique.

Naturellement, la difficulté monte avec la dimension topologique du bord. Cette section est motivée par la question suivante :

**Question 1 :** *Quels sont les groupes hyperboliques, qui ont un bord à l'infini de dimension conforme Ahlfors régulière égale à 1 ?*

Par exemple, si  $\partial G$  est homéomorphe au cercle  $S^1$ , alors  $G$  est virtuellement fuchsien ([CJ94], [Gab92], [Tu88]),  $\dim_{AR} \partial G = 1$  et celle-ci est atteinte par une distance de la jauge. Réciproquement, ces deux dernières conditions impliquent  $\partial G \simeq S^1$  (voir aussi [BonK02b]). Dans la suite, on suppose toujours que la dimension topologique de  $\partial G$  est égale à 1.

En général, la réponse à la Question 1 dépend, au moins partiellement, de la topologie du bord et surtout de l'existence de points de coupure locale dans  $\partial G$ . D'après les travaux de B. Bowditch [Bow98a], si  $G$  n'est pas virtuellement fuchsien, alors  $\partial G$  a un point de coupure locale si et seulement si  $G$  se scinde au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. Une conséquence des travaux de Mackay [Mac10] (voir aussi le Corollaire 2.13 dans cette thèse) est la suivante :

**THÉORÈME 6.1.** *Si  $G$  est un groupe hyperbolique, tel que  $\partial G$  est connexe et sans points de coupure locale, alors  $\dim_{AR} \partial G > 1$ .*

Autrement dit, si  $G$  est un groupe hyperbolique à un bout, tel que  $\dim_{AR} \partial G = 1$ , alors  $G$  est virtuellement fuchsien ou  $G$  se scinde au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. D'après les travaux de Kapovich et Kleiner [KK00], si  $G$  est un groupe hyperbolique avec  $\partial G$  connexe, sans points de coupure locale et de dimension topologique égale à 1, alors  $\partial G$  est homéomorphe au tapis de Sierpiński ou à l'éponge de Menger.

L'existence de points de coupure locale n'implique pas que la dimension conforme AR est égale à 1. Il suffit de considérer un produit amalgamé au-dessus d'un groupe cyclique d'un groupe fuchsien et d'un groupe à un bout qui ne se scinde pas au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. Dans ce cas, les facteurs sont des sous-groupes quasiconvexes et donc la dimension conforme AR est bornée inférieurement par la dimension conforme AR de chaque facteur. Il se pose donc la question suivante :

**Question 2 :** *Est-il vrai que  $\dim_{AR} \partial G = 1$ , si  $\partial G$  ne contient pas un tapis de Sierpiński ou une éponge de Menger ? Plus précisément, est-il vrai que si pour tout sous-groupe à un bout et quasiconvexe  $H$  de  $G$ ,  $\partial H$  a un point de coupure locale, alors  $\dim_{AR} \partial G = 1$  ?*

Une approche possible pour répondre à cette question est donnée par les résultats d'accessibilité forte pour les groupes hyperboliques. Si  $G$  est un groupe hyperbolique, on peut le décomposer de façon maximale comme un graphe de groupes au-dessus de groupes finis, et ensuite prendre chaque sommet de cette décomposition, et le décomposer de façon maximale au-dessus de groupes virtuellement cycliques. Maintenant, on peut répéter ce processus, pour chaque groupe obtenu comme sommets dans l'étape précédente. D'après les travaux de Delzant et Potyagailo [DP01] et de Vavrichek [Va08], si  $G$  est sans 2-torsion, ce processus doit éventuellement finir, avec des sous-groupes de  $G$  qui ne se scindent pas au-dessus de sous-groupes finis ou virtuellement cycliques. Voir aussi [Bow98b].

C'est-à-dire, on peut décomposer répétitivement  $G$  au-dessus de sous-groupes finis et virtuellement cycliques, jusqu'à que tous les sous-groupes soient finis, virtuellement fuchiens, ou de bord connexe sans point de coupure locale. Les hypothèses de la Question 2 interdisent ce dernier cas, et donc  $G$  s'obtient essentiellement comme produits amalgamés répétitifs de groupes virtuellement fuchiens au-dessus de groupes finis et virtuellement cycliques. Les groupes ainsi construits forment la famille de groupes sur laquelle on doit essayer de répondre à la Question 1.

Aussi une question intermédiaire qui se pose est la suivante : est-il vrai que le produit amalgamé de deux groupes hyperboliques, à un bout et de dimension conforme AR égale à 1, au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique, est aussi de dimension conforme AR égale à 1 ? Dans la Section 7, on étudie quelques exemples de cette situation.

Le but de ce chapitre est de donner une réponse partielle à la Question 1. Dans une première partie on montre dans le Théorème 6.2 que la dimension conforme AR est stable par scindements au-dessus de groupes finis. D'après les travaux de Dunwoody et Stallings ([Dun85],[Sta68]), ceci montre qu'on peut se rendre au cas des groupes à un bout.

Deuxièmement, on s'appuie sur l'étude, due à Bowditch [Bow98a], de la structure des points de coupure locale des bords de groupes hyperboliques à un bout. Cela nous permet, en mettant en relation les propriétés du scindement JSJ avec la propriété BR, de déduire dans le Théorème 6.5 un critère pour  $\dim_{AR} \partial G = 1$ .

## 2. Enoncés des théorèmes

**2.1. Stabilité par scindements au-dessus de groupes finis.** D'après les travaux de M. J. Dunwoody et J. R. Stallings ([Dun85], [Sta68]) sur l'accessibilité d'un groupe de présentation finie, il existe une action de  $G$  sur un arbre simplicial  $\Sigma$ , sans inversion d'arête et de quotient fini, tel que les stabilisateurs des arêtes de  $\Sigma$  sont finis et les stabilisateurs des sommets ont au plus un bout. On appelle cette action un scindement DS de  $G$ . Dans la section 5, on étudie la propriété de séparation uniforme des composantes (Théorème 4.14 du Chapitre 4) pour le bord d'un groupe hyperbolique, ce qui nous permet de montrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.2** (Stabilité par scindements au-dessus de groupes finis). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique, et soit  $\Sigma$  l'arbre du scindement DS. On note  $\{v_1, \dots, v_M\}$  un ensemble de représentants des orbites des sommets de  $\Sigma$ , et  $G(v_i)$  leurs respectifs stabilisateurs. Alors*

- *la dimension conforme AR de  $G$  est égale à zéro si tous les  $G(v_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$  sont finis, ou*
- *$\dim_{AR} G = \max \{\dim_{AR} G(v_i) : i = 1, \dots, M\}$  sinon.*

**2.2. La propriété BR pour les bords des groupes hyperboliques.** On commence par rappeler quelques définitions.

DÉFINITION 6.3. *Un groupe hyperbolique non-élémentaire (infini et non virtuellement cyclique)  $G$  est dit fuchsien s'il agit proprement discontinûment et par isométries sur  $\mathbb{H}^2$  (le plan hyperbolique réel). On dit que  $G$  est fuchsien cocompact si cette action l'est.*

L'action n'est pas forcément fidèle, mais son noyau est fini. D'après ([Tu88], [CJ94], [Gab92]) un groupe hyperbolique non-élémentaire est fuchsien cocompact si et seulement si son bord est homéomorphe au cercle  $S^1$ . Plus généralement, si  $G$  est un groupe fuchsien, son *coeur convexe* est l'ensemble minimal fermé non-vide et convexe de  $\mathbb{H}^2$  qui est  $G$ -invariant. Dans cette thèse, on dira que  $G$  est *convexe cocompact* si l'action est cocompacte sur son coeur convexe mais non cocompacte sur  $\mathbb{H}^2$ . Dans ce cas, les sous-groupes *périphériques* de  $G$  sont les stabilisateurs des composantes connexes du bord de son coeur convexe.

On rappelle le théorème suivant (voir [Bow98a] Théorème 0.1 et Théorème 5.28). Pour la définition de sous-groupe quasi-convexe voir la Définition 6.9.

THÉORÈME 6.4 (Scindement JSJ). *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout qui n'est pas un groupe fuchsien cocompact. Alors il existe une action simpliciale de  $G$  sur un arbre simplicial  $\Sigma$ , minimale de quotient  $\Sigma/G$  fini, dont les stabilisateurs d'arêtes sont virtuellement cycliques. Les sommets de  $\Sigma$  sont de trois types différents :*

- *Virtuellement cyclique : le stabilisateur est un sous-groupe virtuellement cyclique maximal dans  $G$ . Il est de valence finie et au moins deux dans  $\Sigma$ .*
- *Surface ou MHF : le stabilisateur est un groupe fuchsien convexe cocompact non-élémentaire et quasiconvexe dans  $G$ . Ses groupes périphériques sont précisément les stabilisateurs des arêtes incidentes.*
- *Rigide : le stabilisateur est quasiconvexe non élémentaire et n'est pas de type surface.*

*Ces types sont mutuellement exclusifs et l'action de  $G$  préserve le types des sommets. Deux sommets adjacents ne sont jamais du même type.*

Pour construire l'arbre simplicial  $\Sigma$ , Bowditch utilise la structure des points de coupure locale de  $\partial Z$ . En effet, tout point de coupure locale de  $\partial Z$  appartient à l'ensemble limite  $\Lambda_v$  (pour la définition voir la Section 4) d'un sommet  $v$  de  $\Sigma$  de type virtuellement cyclique ou surface. En particulier, si  $G(v)$  est un stabilisateur d'un sommet de type rigide, alors  $G(v)$  n'admet pas de scindement au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique, relatif aux stabilisateurs des arêtes incidentes à  $v$ . Cela, et les propriétés des scindements quasiconvexes, nous permettra d'étudier la propriété BR sur le bord de  $G$ .

Le but principal de la section 6 est de montrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.5.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout. Si  $G$  est un groupe fuchsien cocompact, ou si dans le scindement JSJ de  $G$  il n'y a pas de sommets de type rigide, alors  $\partial G$  vérifie la propriété BR.*

Comme corollaire, d'après la Proposition 5.9 et le fait que  $\partial Z$  est quasi-autosimilaire (Proposition 6.8), on obtient :

**COROLLAIRE 6.6.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout. Si  $G$  est un groupe fuchsien cocompact, ou si dans le scindement JSJ de  $G$  il n'y a pas de sommets de type rigide, alors la dimension conforme Ahlfors régulière de  $\partial G$  est égale à 1.*

On remarque que si  $G$  vérifie les hypothèses du corollaire, la dimension conforme AR est atteinte seulement quand  $G$  est un groupe fuchsien cocompact.

### 3. Groupes hyperboliques et dynamique à l'infini

On commence par rappeler quelques définitions et par établir quelques notations et propriétés qui nous seront utiles dans la suite. Soit  $Z$  un espace métrique, géodésique et propre, et soit  $G$  un groupe qui agit par isométries et proprement discontinûment sur  $Z$  ; c'est-à-dire, pour tous sous-ensembles compacts  $K$  et  $L$  de  $Z$ , la quantité d'éléments  $g \in G$  tels que  $g(K) \cap L \neq \emptyset$  est finie. Si en plus l'action est cocompacte, on dit que  $G$  agit géométriquement sur  $Z$ .

Soient  $G$  un groupe de type fini et  $Z = \mathcal{C}(G, S)$  son graphe de Cayley par rapport à une partie génératrice  $S$  finie et symétrique ( $S = S^{-1}$ ). Les sommets de  $Z$  sont les éléments de  $G$ , et il y a une arête de  $Z$  entre  $g$  et  $h$  si et seulement si  $h = gs$  pour un certain  $s \in S$ . On munit  $Z$  de la distance de longueur qui rend chaque arête de  $Z$  isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ . Avec cette distance, l'action par multiplication à gauche de  $G$  sur  $Z$  est une action géométrique.

D'après le Lemme de Svarc-Milnor, si un groupe  $G$  agit géométriquement sur un espace métrique géodésique et propre  $Z$ , alors  $G$  est de type fini et  $Z$  est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley de  $G$ . Un groupe  $G$  est *hyperbolique* s'il agit géométriquement sur un espace métrique hyperbolique géodésique et propre.

Donc si  $G$  est hyperbolique, il est finement engendré et  $Z := \mathcal{C}(G, S)$  est un espace métrique propre géodésique hyperbolique au sens de Gromov. On peut définir sans ambiguïté le bord de  $G$  en l'identifiant avec  $\partial Z$ . On considère la jauge conforme canonique associée au bord de  $Z$ , induite par les métriques visuelles. Dans la suite, on fixe une telle distance  $d_\epsilon$  sur  $\partial Z$ , et on rappelle qu'elle vérifie

$$d_\epsilon(x, y) \asymp \exp(-\epsilon(x|y)), \quad \forall x, y \in \partial Z,$$



où  $(x|y)$  est le produit de Gromov de  $x$  et  $y$  vu de l'élément neutre de  $G$ .

On doit rappeler la notion de homéomorphisme *quasimöbius*. Si  $a, b, c, d \in \partial Z$  le birapport de ces quatre points est défini par

$$[a, b, c, d]_\epsilon := \frac{d_\epsilon(a, b)}{d_\epsilon(a, c)} \cdot \frac{d_\epsilon(c, d)}{d_\epsilon(b, d)}.$$

Alors un homéomorphisme  $f : \partial Z \rightarrow \partial Z$  est  $\eta$ -quasimöbius si pour tous  $a, b, c, d \in \partial Z$  on a

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)]_\epsilon \leq \eta([a, b, c, d]_\epsilon).$$

On a la propriété suivante (voir [Haïss08] Théorème 3.1).

**PROPOSITION 6.7.** *Une  $(\lambda, c)$ -quasi-isométrie  $f : Y \rightarrow Y'$  entre espaces hyperboliques se prolonge continûment en un homéomorphisme  $f : \partial Y \rightarrow \partial Y'$  et, si  $d$  et  $d'$  sont des métriques visuelles de paramètre  $\epsilon, \epsilon'$ , alors il existe  $C = C(\lambda, c, \epsilon/\epsilon') > 0$  et  $\alpha = \alpha(\lambda, c, \epsilon/\epsilon') \geq 1$  telle que  $f$  est  $\eta$ -quasimöbius, avec  $\eta(t) = C \cdot \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$ . Si  $f$  est une isométrie et si  $\epsilon = \epsilon'$ , alors on peut choisir  $\alpha = 1$ .*

En particulier, si  $G$  est un groupe hyperbolique il existe une constante  $C = C(\epsilon)$  telle que le groupe  $G$  agit sur  $\partial Z$  par des homéomorphismes  $\eta$ -quasimöbius avec  $\eta(t) = C \cdot t$ .

On rappelle que si  $f : B(x, r) \rightarrow U \subset \partial Z$  est un homéomorphisme  $\eta$ -quasimöbius et s'il existe une constante  $\lambda > 0$  et trois points  $x_1, x_2, x_3 \in B(x, r)$ , tels que

$$d_\epsilon(x_i, x_j) \geq \frac{\text{diam}_\epsilon B(x, r)}{\lambda} \text{ et } d_\epsilon(f(x_i), f(x_j)) \geq \frac{\text{diam}_\epsilon U}{\lambda}, \quad (6.3.1)$$

alors  $f$  est  $\eta_\lambda$ -quasisymétrique avec  $\eta_\lambda(t) = 2\lambda\eta(2\lambda t)$ . En particulier, si  $\eta$  est linéaire il l'est aussi  $\eta_\lambda$  (voir [Väis84]).

D'après les travaux de P. Tukia et B. Bowditch,  $G$  agit proprement discontinûment et cocompactement sur  $\partial^3 Z$ , l'espace de triplets de points de  $\partial Z$  moins la grande diagonale. Cocompacité sur les triplets veut dire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout triplet  $\{x_1, x_2, x_3\}$  de points distincts de  $\partial Z$  il existe  $g \in G$  tel que  $d_\epsilon(gx_i, gx_j) \geq \delta$ ,  $i \neq j$ . Cette propriété et la Proposition 6.7 impliquent que  $G$  est un groupe de convergence uniforme et uniformément quasimöbius.

Pour montrer que  $\partial Z$  est quasi-autosimilaire, on a besoin d'utiliser le fait que  $\partial Z$  est uniformément parfait dès que  $G$  est non élémentaire. Mais d'après [Coo93], la distance  $d_\epsilon$  sur  $\partial Z$  est Ahlfors régulière de dimension  $v/\epsilon$  où  $v$  est l'entropie volumique de l'action de  $G$  sur  $Z$ .

Le principe de *l'ascenseur conforme*, mis en évidence par D. Sullivan, exprime que la dynamique permet de changer d'échelle avec distorsion bornée (voir [Sul82]). Il est responsable de l'autosimilarité de  $\partial Z$ .

**PROPOSITION 6.8** (Principe de l'ascenseur conforme, voir aussi [Haïss08] Prop. 4.6). *Supposons que  $G$  est hyperbolique et non élémentaire. Alors il existe  $r_0 > 0$ ,  $c_0 > 0$  et une fonction de distorsion  $\eta(t) = C' \cdot t$  telles que, pour tout  $x \in \partial Z$ , pour tout rayon  $r > 0$ , il existe  $g \in G$  telle que  $g(B(x, r)) \supset B(g(x), r_0)$ ,  $\text{diam}_\epsilon B(g(x), r_0) \geq c_0$  et  $g|_{B(x, r)}$  est  $\eta$ -quasisymétrique. En particulier,  $\partial Z$  est  $L$ -quasi-autosimilaire.*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $\partial Z$  est uniformément parfait (de constante  $C_P \geq 1$ ), on considère  $y, z$  dans  $\partial Z$  avec

$$y \in B(x, r) \setminus B(x, c_P r) \text{ et } z \in B(x, c_P r/2) \setminus B(x, c_P^2 r/2).$$

La propriété de convergence uniforme nous fournit un élément  $g \in G$  tel que  $\{gx, gy, gz\}$  soit  $\delta$ -séparé. Par la Proposition 6.7,  $g : \partial Z \rightarrow \partial Z$  est quasimöbius de fonction de distorsion linéaire. Comme

$$d_\epsilon(x, y) \geq c_P r, \quad d_\epsilon(x, z) \geq c_P^2 r/2, \quad d_\epsilon(y, z) \geq c_P r/2,$$

et leurs images sont un triple  $\delta$ -séparé, si on prend

$$\lambda = \max\{\delta^{-1}, 4c_P^{-2}\} \cdot \text{diam}_\epsilon Z,$$

alors d'après (6.3.1) la restriction de  $g$  à  $B(x, r)$  est  $\eta$ -quasisymétrique, où  $\eta(t) = C' \cdot t$  et  $C'$  est une constante uniforme. Comme  $g$  est défini globalement sur  $\partial Z$  on a  $B(g(x), \delta/\eta(1)) \subset U = g(B(x, r))$ , et donc il suffit de prendre  $r_0 = \delta/\eta(1)$ . De plus, comme  $\text{diam}_\epsilon B(g(x), r_0) \geq c_P \cdot r_0$  on peut choisir  $c_0 = c_P \cdot r_0$ .  $\square$

#### 4. Scindements quasiconvexes et topologie du bord

On rappelle la définition de sous-groupe quasiconvexe.

**DÉFINITION 6.9.** *Un sous-ensemble  $Y$  d'un espace métrique géodésique  $Z$  est quasiconvexe s'il existe une constante  $K \geq 0$  telle que tout point de toute géodésique de  $Z$  qui joint deux points de  $Y$  est à distance inférieure ou égale à  $K$  de  $Y$ . On dit qu'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est quasiconvexe si  $H$  est un sous-ensemble quasiconvexe de  $Z$ .*

Cette définition dépend *a priori* de la partie génératrice considérée pour construire la distance sur  $Z$ . Mais quand  $G$  est un groupe hyperbolique, un sous-groupe est

quasiconvexe si et seulement si il l'est par rapport à n'importe quelle partie génératrice. En effet, dans ce cas la définition est équivalente à : l'inclusion  $H \hookrightarrow Z$  est un plongement quasi-isométrique. Donc  $H$  est aussi un groupe hyperbolique et son bord  $\partial H$  peut s'identifier de façon canonique à l'ensemble limite  $\Lambda_H \subset \partial Z$  ; c'est-à-dire, l'ensemble des points d'accumulation de  $H$  dans  $\partial Z$ . Si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-groupes quasiconvexes de  $G$ , alors  $H_1 \cap H_2$  est aussi quasiconvexe (voir [Sho90], [BH99]) et  $\Lambda_{H_1 \cap H_2} = \Lambda_{H_1} \cap \Lambda_{H_2}$ .

Soit  $\Sigma$  un arbre simplicial, c'est-à-dire un complexe simplicial de dimension 1 connexe et sans cycle. On note  $V(\Sigma)$  et  $E(\Sigma)$  les sommets et les arêtes de  $\Sigma$  respectivement. On munit la distance de longueur sur la réalisation géométrique de  $\Sigma$  qui rend chaque arête isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ .

Considérons une action simpliciale de  $G$  sur  $\Sigma$ , sans inversion d'arêtes et telle que le quotient  $\Sigma/G$  soit fini, de sorte que  $G$  s'identifie au groupe fondamental d'un graphe de groupes. On suppose aussi que l'action est minimale ; c'est-à-dire  $\Sigma$  est le seul sous-arbre  $G$ -invariant. Etant donnés  $v \in V(\Sigma)$  et  $e \in E(\Sigma)$  on note  $G(v)$  et  $G(e)$  les stabilisateurs de  $v$  et  $e$  respectivement. On note aussi  $\Lambda_v$  et  $\Lambda_e$  l'ensemble limite de  $G(v)$  et  $G(e)$  respectivement. Donc si  $e \in E(\Sigma)$  et  $v, w \in V(\Sigma)$  sont ses extrémités, comme  $G$  agit sans inversion d'arêtes, on a  $G(e) = G(v) \cap G(w)$ .

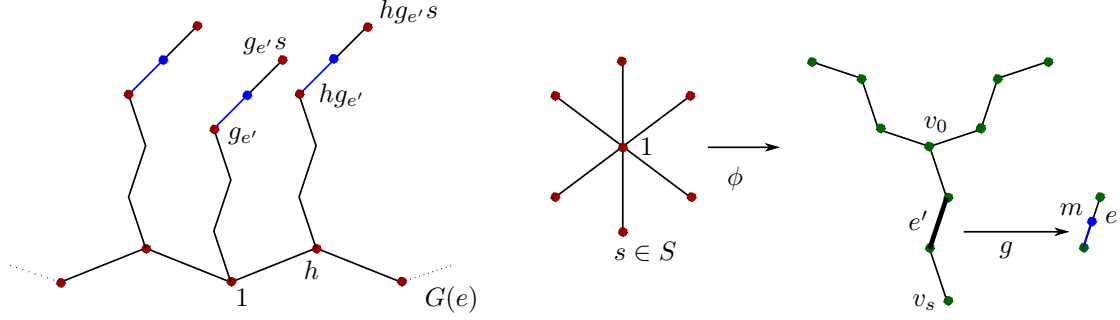
Les résultats énoncés dans cette section sont tirés de [Bow98a]. On inclut leurs démonstrations lorsque les originales semblaient être un peu trop elliptiques.

**4.1. Quelques estimations concernant les diamètres des  $\Lambda_e$  et  $\Lambda_v$ .** Dans cette partie, on s'intéresse aux conséquences sur la topologie de  $\partial G$ , de l'action de  $G$  sur  $\Sigma$ . Supposons dorénavant que  $G(e)$  est quasiconvexe pour toute arête  $e \in E(\Sigma)$ .

**DÉFINITION 6.10.** *On définit  $\phi : Z \rightarrow \Sigma$  une fonction continue et équivariante en posant  $\phi(1) = v_0$ , où  $v_0 \in V(\Sigma)$  est un sommet quelconque, et  $\phi(g) = g \cdot v_0$  pour tout  $g \in G$ . Cela détermine  $\phi$  sur  $G$ , les sommets de  $Z$ . Si  $e = (g, h)$  est une arête de  $Z$ , on étend  $\phi$  de sorte qu'elle envoie  $e$  linéairement sur l'unique arc qui joint  $\phi(g)$  et  $\phi(h)$ .*

L'image d'une arête de  $Z$  est ou bien un sommet de  $\Sigma$  ou bien un arc. En particulier, l'image de  $\phi$  est un sous-arbre  $G$ -invariant de  $\Sigma$ , et comme l'action de  $G$  est minimale,  $\phi$  est surjective. Pour chaque  $s \in S$  on note  $I_s = (1, s)$  l'arête entre 1 et  $s$ , et  $v_s = s \cdot v_0$ , de sorte que  $\phi(I_s) = [v_0, v_s]$  est l'unique chemin de  $\Sigma$  qui joint  $v_0$  et  $v_s$ . Donc si  $I = (g, gs)$  est une arête de  $Z$  avec  $g \in G$  et  $s \in S$ , alors  $\phi(I) = g \cdot [v_0, v_s]$ . Comme  $S$  est un ensemble fini,

$$L := \max\{\ell([v_0, v_s]) : s \in S\} < \infty,$$

FIGURE 6.1. L'ensemble  $Q(e)$ .

et donc  $\phi$  est Lipschitz de constante  $L$ .

NOTATION. Etant donnée une arête  $e$  de  $\Sigma$  on note  $m(e)$  son milieu et  $Q(e) := \phi^{-1}(m(e))$ . Etant donné  $v \in V(\Sigma)$ , on note  $\Delta(v)$  les arêtes de  $\Sigma$  qui sont incidentes à  $v$ . Soit  $M(v)$  l'ensemble connexe formé par  $v$  et tous les segments des arêtes  $e \in \Delta(v)$  qui joignent  $v$  à  $m(e)$ . On définit  $Q(v) := \phi^{-1}(M(v))$ . Alors  $Q(e)$  et  $Q(v)$  sont respectivement  $G(e)$  et  $G(v)$  invariants, et pour toute arête  $e \in \Delta(v)$  on a  $Q(e) \subset Q(v)$ . Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on note  $\Sigma(e)$  la composante connexe de  $\Sigma \setminus \{m(e)\}$  qui ne contient pas  $v_0$ . Soit  $Z(e) := \phi^{-1}(\Sigma(e))$ .

Pour pouvoir en déduire de propriétés topologiques du bord de  $G$  à partir de l'action sur  $\Sigma$ , on a besoin de quelques lemmes.

LEMME 6.11. *Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$ , il existe une constante  $K = K(e) > 0$  telle que*

$$\text{dist}_H(Q(e), G(e)) \leq K. \quad (6.4.1)$$

En particulier  $\partial Q(e) = \overline{Q(e)} \setminus Q(e) = \Lambda_e$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $e \in E(\Sigma)$ . On commence par montrer que tout point de  $Q(e)$  est à distance inférieure ou égale à  $K$  de  $G(e)$ , où  $K$  est une constante qui dépend de  $e$ . En effet, si  $I = (g, gs)$  est une arête de  $Z$  avec  $g \in G$  et  $s \in S$ , alors  $Q(e) \cap I$  consiste au plus d'un seul point, car ou bien l'image par  $\phi$  de  $I$  est un sommet de  $\Sigma$ , ou bien  $\phi$  est injective sur  $I$ . Alors il existe  $x \in Q(e) \cap I$  si et seulement si, il existe une arête  $e' \in [v_0, v_s]$  telle que  $g \cdot e' = e$ . Etant fixés  $s$  et  $e' \in [v_0, v_s]$ , on choisit arbitrairement  $g_{e'} \in G$  (s'il existe) tel que  $g_{e'} \cdot e' = e$ . Alors tous les autres  $g \in G$  tels que  $g \cdot e' = e$  sont de la forme  $g = hg_{e'}$  avec  $h \in G(e)$ . Donc  $\text{dist}(G(e), g) \leq d(h, g) = d(h, hg_{e'}) = d(1, g_{e'})$  (voir figure 4.1). Comme le cardinal de  $S$  et la quantité d'arêtes en chaque  $[v_0, v_s]$  sont finis, il suffit de prendre

$$K = 1 + \max\{d(1, g_{e'}) : e' \in [v_0, v_s], s \in S\} < \infty.$$

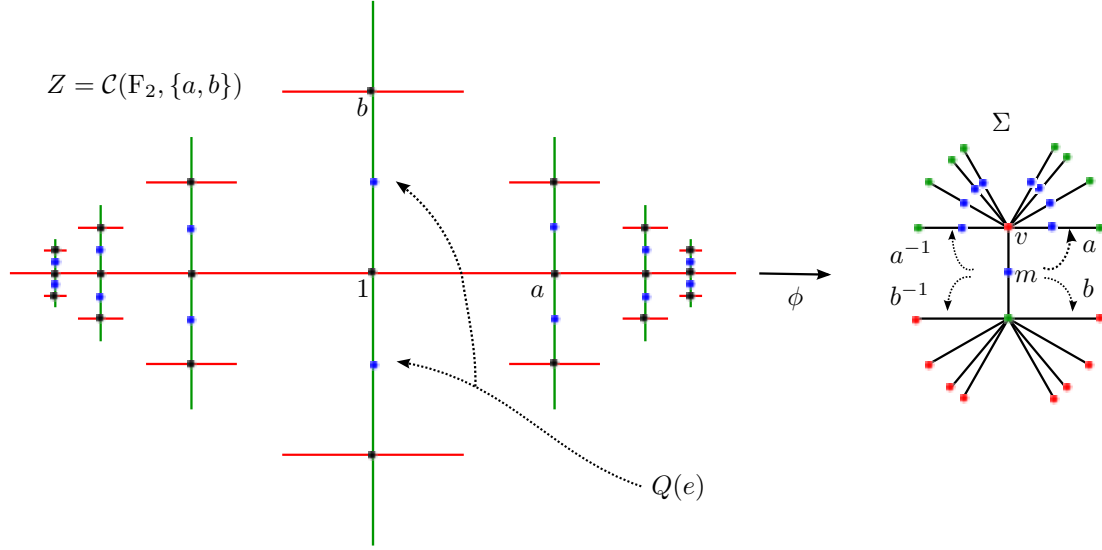


FIGURE 6.2. Description de la fonction  $\phi$  et des ensembles  $Q(e)$  pour le groupe libre  $F_2$ .

Comme  $\phi$  est surjective, il existe au moins un  $g \in G$  tel que  $Q(e) \cap I \neq \emptyset$ , et donc il existe au moins un  $s \in S$  et une arête  $e' \in [v_0, v_s]$ , tels qu'on peut choisir  $g_{e'}$  comme ci-dessus. Alors pour tout  $h \in G(e)$ , l'élément  $g_h = hg_{e'} \in G$  vérifie  $g_h \cdot e' = e$  et donc  $Q(e) \cap (g_h, g_h s) \neq \emptyset$ . C'est-à-dire, pour tout  $h \in G(e)$ , on a aussi  $\text{dist}(h, Q(e)) \leq K$ , et donc  $\text{dist}_H(Q(e), G(e)) \leq K$ .  $\square$

EXEMPLE 6.3.1. Soient  $G = F_2$  le groupe libre à deux générateurs  $a$  et  $b$ , et  $Z = \mathcal{C}(F_2, \{a, b\})$ . On note  $A = \langle a \rangle$  et  $B = \langle b \rangle$  de sorte que  $G = A * B = \bullet^A \xrightarrow{1} \bullet^B$ . Soit  $\Sigma$  l'arbre de Bass-Serre associé à ce scindement. Soit  $e = (v, w)$  l'arête de  $\Sigma$  telle que  $G(v) = A$  et  $G(w) = B$  et  $m(e)$  son milieu. Les arêtes incidentes à  $v$  sont en correspondance avec  $A$  et de manière analogue les arêtes incidentes à  $w$  sont en correspondance avec  $B$ .

On choisit  $\phi : Z \rightarrow \Sigma$  en posant  $\phi(1) = v$ , de sorte que  $\phi(A) = \{v\}$ . On définit une partition des sommets de  $\Sigma$  par  $V(\Sigma) = V_A(\Sigma) \cup V_B(\Sigma)$ , où  $V_A(\Sigma)$  et  $V_B(\Sigma)$  sont respectivement l'ensemble des sommets de  $\Sigma$  dont le stabilisateur est conjugué à  $A$  et à  $B$ . Alors l'image par  $\phi$  des sommets de  $Z$  est égale à  $V_A(\Sigma)$ .

Soit  $I = (g, gs)$  avec  $g \in G$  et  $s \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$  une arête de  $Z$ . On a  $\phi(g) = g \cdot v$  et  $\phi(gs) = g \cdot v'$ , où  $v' = s \cdot v$ . Si  $s = a^{\pm 1}$  alors  $\phi(I)$  est un sommet de  $V_A(\Sigma)$  car  $v' = v$ . Si  $s = b^{\pm 1}$  alors  $v'$  est un sommet adjacent à  $w$ , et donc  $\phi(I)$  est l'image par  $g$  du chemin de longueur deux qui va de  $v$  à  $v'$  et passe par  $w$ .

Une préimage par  $\phi$  de  $m(e)$  appartient nécessairement à une arête de  $Z$  de la forme  $I = (g, gs)$  avec  $s = b^{\pm 1}$ . Soit  $I_s = (1, s)$ , alors  $m(e) \in \phi(I_s)$ , et donc

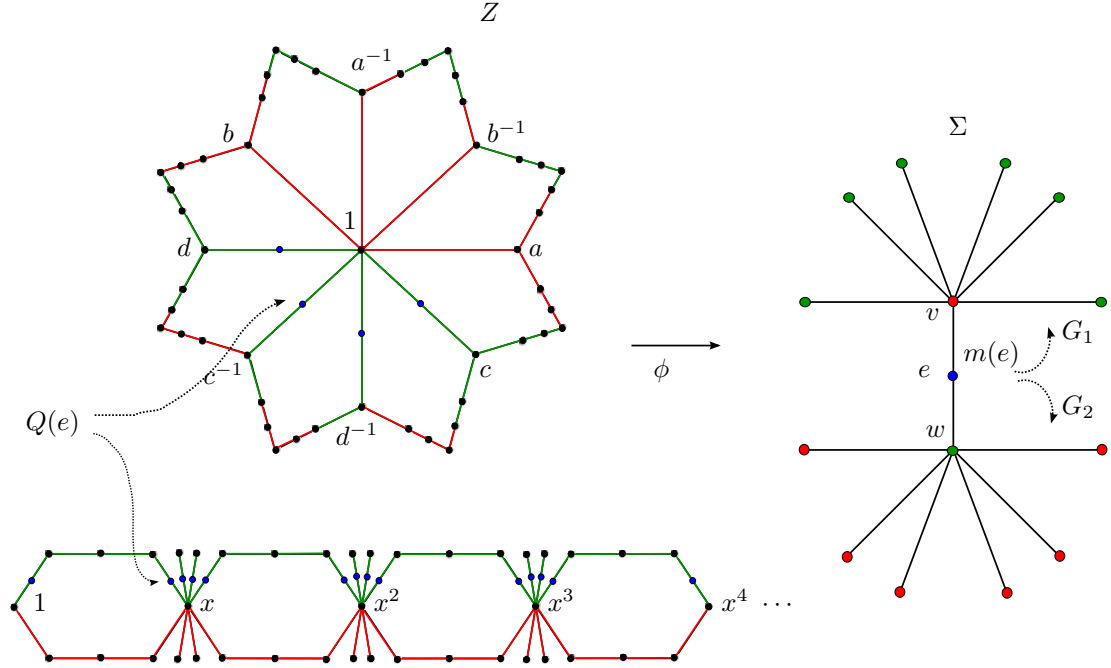


FIGURE 6.3. Description de la fonction  $\phi$  et les ensembles  $Q(e)$  pour le groupe fondamental de la surface de genre deux.

$m(e) \in \phi(I) = g \cdot \phi(I_s)$  si et seulement si  $g = 1$ . Donc  $Q(e)$  est formé par deux points de  $Z$ , un pour chaque arête  $(1, b)$  et  $(1, b^{-1})$ . Toutes les autres arêtes incidentes à  $v$  sont l'image de  $e$  par  $a^i$  pour un certain  $i \in \mathbb{Z}$ . Donc si  $e' = a^i \cdot e$ , on a  $Q(e') = a^i(Q(e))$  et donc est formé par deux points, un pour chaque arête  $(a^i, a^i b)$  et  $(a^i, a^i b^{-1})$ . De manière analogue on obtient tous les ensembles  $Q(e')$ . Voir figure 6.2.

EXEMPLE 6.3.2. Soit  $G = \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d]^{-1} = 1 \rangle$  le groupe fondamental de la surface fermée de genre deux. Soient  $G_1 = \langle a, b \rangle$  et  $G_2 = \langle c, d \rangle$ , de sorte que  $G = G_1 *_C G_2$  où  $C = \langle x \rangle$  et  $x = [a, b] = [c, d]$ . On note  $Z = \mathcal{C}(G, S)$  où  $S = \{a, b, c, d\}$  et  $\Sigma$  l'arbre de Bass-Serre associé au produit amalgamé de  $G_1$  et  $G_2$  au-dessus de  $C$ . Soit  $e = (v, w)$  l'arête telle que  $G(e) = C$  avec  $G(v) = G_1$  et  $G(w) = G_2$ . On note  $m(e)$  le milieu de  $e$ .

On choisit  $\phi : Z \rightarrow \Sigma$  en posant  $\phi(1) = v$ , de sorte que  $\phi(G_1) = \{v\}$ . On définit une partition des sommets de  $\Sigma$  par  $V(\Sigma) = V_1(\Sigma) \cup V_2(\Sigma)$ , où  $V_1(\Sigma)$  et  $V_2(\Sigma)$  sont respectivement l'ensemble des sommets de  $\Sigma$  dont le stabilisateur est conjugué à  $G_1$  et à  $G_2$ . Alors l'image par  $\phi$  des sommets de  $Z$  est égale à  $V_1(\Sigma)$ .

Soit  $I = (g, gs)$  avec  $g \in G$  et  $s \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, d^{\pm 1}\}$  une arête de  $Z$ . On a  $\phi(g) = g \cdot v$  et  $\phi(gs) = g \cdot v'$ , où  $v' = s \cdot v$ . Si  $s \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$  alors  $\phi(I)$  est un sommet

de  $V_1(\Sigma)$  car  $v' = v$ . Si  $s \in \{c^{\pm 1}, d^{\pm 1}\}$  alors  $v'$  est un sommet adjacent à  $w$ , et donc  $\phi(I)$  est l'image par  $g$  du chemin de longueur deux qui va de  $v$  à  $v'$  et passe par  $w$ .

Une préimage par  $\phi$  de  $m(e)$  appartient nécessairement à une arête de  $Z$  de la forme  $I = (g, gs)$  avec  $s \in \{c^{\pm 1}, d^{\pm 1}\}$ . On note  $I_s = (1, s)$  avec  $m(e) \in \phi(I_s)$ . Donc  $m(e) \in \phi(I) = g \cdot \phi(I_s)$  si et seulement si  $g$  ou  $gs$  appartient à  $G(e) = C$ . En effet, comme  $\phi(I_s)$  est un chemin de  $\Sigma$  de longueur deux qui joint  $v$  et  $v' = s \cdot v$  et passe par  $w$ , si  $m(e) \in g \cdot \phi(I_s)$  on a  $g \cdot w = w$  et donc  $g \in G_2$ . Si  $g \notin G_1$ , c'est-à-dire,  $g \cdot v \neq v$  on a  $g \cdot v' = (gs) \cdot v = v$  et donc  $gs \in G_1$ . Comme aussi  $s \in G_2$ , on a  $gs \in G_1 \cap G_2 = C$ . Si  $g \in G_1$  on a de manière analogue  $g \in C$ .

Donc  $Q(e)$  est formé par une quantité dénombrable de points de  $Z$ , un pour chaque arête de la forme  $(g, gc^{\pm 1})$  et  $(g, gd^{\pm 1})$  avec  $g \in C$ . De manière analogue on obtient tous les ensembles  $Q(e')$ . Voir figure 4.1.

Une conséquence importante du Lemme 6.11 est la suivante.

LEMME 6.12. *Les ensembles  $\{Q(e) : e \in E(\Sigma)\}$  sont uniformément quasiconvexes. De plus,*

$$\text{diam}_\epsilon \Lambda_e = \text{diam}_\epsilon \partial Q(e) \lesssim \exp(-\epsilon \text{dist}(1, Q(e))). \quad (6.4.2)$$

DÉMONSTRATION. Comme  $\Sigma/G$  est fini il y a seulement une quantité finie d'orbites d'arêtes. Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  un ensemble de représentants de ces orbites. On commence par montrer que  $Q(e_i)$  est quasiconvexe. En effet, si  $\gamma$  est une géodésique qui joint deux points  $x$  et  $y$  de  $Q(e_i)$ , comme la distance de ces deux points à  $G(e_i)$  est bornée supérieurement par  $K_i$ , il existe deux géodésiques  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$ , de longueur plus petite ou égale à  $K_i$ , qui joignent respectivement  $x$  et  $y$  à  $G(e_i)$ . Par hyperbolicité, la courbe  $\sigma = \gamma_x * \gamma * \gamma_y$  est à distance bornée d'une géodésique qui joint deux points de  $G(e_i)$ . Donc, tout point de  $\sigma$  est à distance bornée de  $G(e_i)$ . Comme aussi tout point de  $G(e_i)$  est à distance plus petite ou égale à  $K_i$  de  $Q(e)$ , on obtient que tout point de  $\gamma$  est à distance bornée de  $Q(e)$ .

De plus, la constante de quasiconvexité  $K_{qc}(i)$  de  $Q(e_i)$  dépend *a priori* seulement de  $K_i$  et de la constante d'hyperbolicité de  $Z$ . Mais si  $g \in G$ , on a  $Q(g \cdot e) = gQ(e)$ . Comme pour tout  $e \in \Sigma$  il existe  $g \in G$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $e = g \cdot e_i$ , les ensembles  $Q(e)$  sont en fait quasiconvexes avec une constante uniforme

$$K_{qc} = \max\{K_{qc}(i) : i = 1, \dots, n\}.$$

Finalement, comme  $Q(e)$  est quasiconvexe de constante uniforme  $K_{qc}$ , pour toute géodésique  $\gamma$  qui joint deux points de  $Q(e)$  on a  $\text{dist}(\gamma, 1) \geq \text{dist}(Q(e), 1) - K_{qc}$ . Cela montre (6.4.2).  $\square$

NOTATION. Si  $f : A \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction réelle définie sur un ensemble  $A$  quelconque, on dit que  $f(a) \rightarrow 0$  pour  $a \in A$ , si l'ensemble  $\{a \in A : f(a) \geq \epsilon\}$  est fini pour tout  $\epsilon > 0$ . On définit de manière analogue  $f(a) \rightarrow \infty$  pour  $a \in A$  :  $\{a \in A : f(a) \leq N\}$  est fini pour tout  $N > 0$ .

De manière analogue que pour les ensembles  $\{Q(e)\}$  on a,

LEMME 6.13. *Les ensembles  $\{Z(e) : e \in E(\Sigma)\}$  sont uniformément quasiconvexes de constante  $K_{qc}$ . En particulier,*

$$\text{diam}_\epsilon Z(e) \lesssim \exp(-\epsilon \text{dist}(1, Z(e))). \quad (6.4.3)$$

De plus,

$$\text{dist}(1, Z(e)) = \text{dist}(1, Q(e)) \rightarrow \infty \text{ pour } e \in E(\Sigma). \quad (6.4.4)$$

DÉMONSTRATION. Si  $\gamma$  est une géodésique qui joint deux points de  $Z(e)$  et  $\sigma$  est la clôture d'une composante connexe de  $\gamma \setminus Z(e)$ , alors  $\phi \circ \sigma$  est une courbe contenue dans la clôture d'une composante connexe de  $\Sigma \setminus \Sigma(e)$ , qui joint deux points de  $\Sigma(e)$ . Comme  $\Sigma$  est un arbre,  $\phi \circ \sigma$  joint  $m(e)$  avec lui-même. Alors  $\sigma$  joint deux points de  $Q(e)$ , et donc est à distance bornée de  $Q(e)$ . Comme  $Q(e) \subset Z(e)$ ,  $\sigma$  est à distance uniformément bornée ( $K_{qc}$ ) de  $Z(e)$ . C'est-à-dire, les ensembles  $Z(e)$  avec  $e \in E(\Sigma)$  sont  $K_{qc}$ -quasiconvexes. L'inégalité (6.4.3) se montre de la même façon que (6.4.2).

Si  $e$  et  $e'$  sont deux arêtes différentes de  $\Sigma$ ,  $d(m(e), m(e')) \geq 1$ . Alors si  $x \in Q(e)$  et  $y \in Q(e')$  on a  $d(x, y) \geq L^{-1} \cdot d(m(e), m(e')) \geq L^{-1}$ . Soit  $M$  une constante uniforme qui borne le cardinal d'un ensemble  $L^{-1}$ -séparé dans une arête de  $Z$ . Comme dans chaque arête  $I$  de  $Z$  il y a au plus un élément de  $Q(e)$ , le cardinal des arêtes  $e$  telles que  $Q(e) \cap I \neq \emptyset$  est borné par  $M$ . Donc, dans la boule  $B(1, n)$  de  $Z$  il y a au plus une quantité finie de  $Q(e)$  qui l'intersecte. C'est-à-dire,  $\text{dist}(1, Q(e)) \rightarrow \infty$  pour  $e \in E(\Sigma)$ .

Finalement, comme toute géodésique  $\gamma$  qui joint 1 à un point de  $Z(e)$  doit passer par  $Q(e)$ , on obtient  $\text{dist}(1, Z(e)) \geq \text{dist}(1, Q(e))$ . L'autre inégalité est dû au fait que  $Q(e) \subset Z(e)$ .  $\square$

REMARQUE. Le Lemme 6.12 est encore vrai, et la démonstration est analogue, si on remplace dans son énoncé  $Q(e)$  par  $Q(v)$ . Aussi  $\{Q(v) : v \in V(\Sigma)\}$  est un recouvrement localement fini de  $Z$  par des ensembles  $K_{qc}$ -quasiconvexes, et  $\partial Q(v) = \Lambda_v$ .

**4.2. Description de  $\partial Z$  à partir de l'action sur  $\Sigma$ .** On peut associer à  $\Sigma$  un bord idéal  $\partial \Sigma$ , formé par les rayons géodésiques issus de  $v_0$ . On s'intéresse à  $\partial \Sigma$



seulement comme ensemble. Voir [Bow98a] Proposition 1.3 , pour une preuve de la proposition suivante.

**PROPOSITION 6.14.** *Supposons que les stabilisateurs  $G(e)$  des arêtes  $e \in E(\Sigma)$  sont quasiconvexes. Alors il existe une partition naturelle  $G$ -invariante  $\partial G = \partial_\infty G \cup \partial_0 G$  avec*

$$\partial_0 G = \bigcup_{v \in V(\Sigma)} \Lambda_v, \quad (6.4.5)$$

et  $\partial_\infty G = \{\gamma \text{ rayon} : \phi(\gamma) \text{ est non-borné}\}$ . De plus, il existe une bijection  $j : \partial_\infty G \rightarrow \partial \Sigma$ .

On se limite à décrire la fonction  $j$ . Soit  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow Z$  un rayon géodésique issu de 1. On note  $I_n = (g_n, g_{n+1})$  les arêtes de  $\gamma$  où  $g_n = \gamma(n)$  pour  $n \geq 0$ . Soit  $v \in V(\Sigma)$  et supposons que  $n \leq m$  sont tels que  $\phi(I_n) \cap M(v) \neq \emptyset$  et  $\phi(I_m) \cap M(v) \neq \emptyset$ . Alors comme  $Q(v)$  est quasiconvexe,  $\gamma([n, m])$  est à distance uniformément bornée de  $Q(v)$ . Donc s'il existe une quantité infinie de  $n$  tels que  $\phi(I_n) \cap M(v) \neq \emptyset$ , on a  $\lim_n \gamma(n) \in \Lambda_v$ .

Supposons maintenant que pour tout  $v \in V(\Sigma)$ , l'ensemble des arêtes  $I_n \in \gamma$  telles que  $\phi(I_n) \cap M(v) \neq \emptyset$  est fini. On a  $\phi(I_s) \cap M(v_0) \neq \emptyset$  car  $\gamma(0) = 1 \in G$  et  $\phi(1) = v_0$ . Alors il existe une suite d'arêtes  $\{e_i\}$  de  $\Sigma$  et une suite croissante d'entiers positifs  $\{n_i\}$ , telles que pour tout  $i \geq 0$  on a  $\phi(\gamma([n_i, \infty))) \subset \Sigma(e_i)$ , où  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  et  $\Sigma(e_{i+1}) \subset \Sigma(e_i)$ . La suite d'arêtes  $\{e_i\}$  définit un rayon géodésique  $r$  de  $\Sigma$  issu de  $v_0$ , et donc un point de  $\partial \Sigma$ . Ce rayon ne dépend que de la classe  $[\gamma]$ , et on peut définir  $j([\gamma]) = r$ .

Soit  $r : [0, \infty) \rightarrow \Sigma$  un rayon issu de  $v_0$ , et soient  $\{e_i = (v_i, v_{i+1})\}_{i \geq 0}$  les arêtes de  $r$ . Le Lemme 6.13 implique que

$$\bigcap_{i \geq 0} \overline{Z(e_i)} = \{x\} \subset \partial Z,$$

et on vérifie que  $j^{-1}(r) = x$ .

## 5. Démonstration du Théorème 6.2

D'après les travaux de M. J. Dunwoody et J. R. Stallings ([Dun85], [Sta68]) sur l'accessibilité d'un groupe de présentation finie, il existe une action de  $G$  sur un arbre simplicial  $\Sigma$ , sans inversion d'arête et de quotient fini, tel que les stabilisateurs des arêtes de  $\Sigma$  sont finis (et en particulier quasiconvexes) et les stabilisateurs des sommets ont au plus un bout. Comme  $G$  est un groupe hyperbolique, ceci veut dire

que, pour tout sommet  $v \in V(\Sigma)$ , ou bien  $G(v)$  est fini et son ensemble limite  $\Lambda_v$  est vide, ou bien  $\Lambda_v$  est connexe. On appelle cette action un scindement DS de  $G$ .

Dans la suite on suppose que les stabilisateurs des arêtes  $e \in E(\Sigma)$  sont tous finis, et donc, on peut utiliser les résultats de la Section 4. On remarque que dans ce cas  $\Lambda_e = \emptyset$  pour toute arête  $e \in E(\Sigma)$ , et donc  $-\partial Z(e) \cap \partial Z(e) = \Lambda_e = \emptyset$ . Donc les ensembles  $\partial Z(e)$  sont des ouverts fermés de  $\partial Z$ . Le but est de montrer le théorème suivant. Sa démonstration est divisée en plusieurs lemmes.

**THÉORÈME.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique, et soit  $\Sigma$  l'arbre du scindement DS. On note  $\{v_1, \dots, v_M\}$  un ensemble de représentants des orbites des sommets de  $\Sigma$ . Alors*

- *la dimension conforme AR de  $G$  est égale à zéro si tous les  $G(v_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$  sont finis, ou*
- *$\dim_{AR} G = \max \{\dim_{AR} G(v_i) : i = 1, \dots, M\}$  sinon.*

D'après la Remarque qui suit la Proposition 2.9, on sait que chaque composante connexe de  $\partial Z$  est linéairement connexe de constante uniforme. Alors il s'agit de montrer que  $\partial Z$  vérifie la condition de séparation uniforme des composantes du Théorème 4.14.

**NOTATION.** Pour tout élément  $g \in G$  on note  $|g| = d(1, g)$ . Comme  $\Sigma/G$  est fini il existe un sous-ensemble d'arêtes  $E_0 = \{e_1, \dots, e_N\}$  telles que pour toute arête  $e \in E(\Sigma)$  il existe  $g \in G$  et  $e_i \in E_0$  tels que  $e = g \cdot e_i$ . Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on choisit, et on fixe pour la suite, un élément  $g_e \in G$  tel que  $e = g_e \cdot e_i$ .

On rappelle que pour chaque  $g \in G$  et  $e_i \in E_0$  tels que  $e = g \cdot e_i$  on a  $Q(e) = g \cdot Q(e_i)$ . Soit  $C$  le maximum des cardinaux des stabilisateurs des arêtes  $e_i$ . Comme la distance de Hausdorff entre  $Q(e_i)$  et  $G(e_i)$  est finie (voir le Lemme 6.11), on peut choisir  $C$  suffisamment grande de sorte qu'elle majore aussi les cardinaux des  $Q(e_i)$ . Donc on obtient

$$\sup \{\text{card}(Q(e)) : e \in E(\Sigma)\} \leq C.$$

En particulier, comme chaque  $Q(e_i)$  est fini, il existe un rayon  $R_i$  tel que  $Q(e_i) \subset B(x_i, R_i)$  avec  $x_i \in Q(e_i)$ . Si  $R := \max\{R_i\}$  on obtient aussi que pour toute  $e \in E(\Sigma)$  il existe  $x_e \in Q(e)$  tel que  $Q(e) \subset B(x_e, R)$ .

Si  $g$  et  $g'$  sont deux éléments de  $G$  tels que  $e = g \cdot e_i = g' \cdot e_i$ , alors  $g' = gh$  pour un certain  $h \in G(e_i)$ . En particulier,  $d(g, g') = d(g, gh) = d(1, h) = |h|$ . Soit  $\eta_i = \max\{|h| : h \in G(e_i)\}$ , alors l'ensemble des éléments  $g \in G$  tels que  $e = g \cdot e_i$  est contenu dans  $B(g_e, \eta)$  où  $\eta := \max\{\eta_i\}$ . Cela implique que pour chaque arête

$e \in E(\Sigma)$  le nombre  $|g_e|$  dépend seulement de  $e$  à la constante additive  $\eta$  près. De plus on a l'estimation suivante :

LEMME 6.15. *Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on a  $\text{dist}(1, Q(e)) = |g_e| + O(1)$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $d_i = \text{dist}(1, Q(e_i))$  pour  $i = 1, \dots, N$ . On pose  $d = \max\{d_i\}$ . Alors pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on a  $\text{dist}(g_e, Q(e)) = \text{dist}(1, Q(e_i)) = d_i$  pour un certain  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Donc  $Q(e)$  est contenu dans la boule de rayon  $d + R$  centrée en  $g_e$ . Cela finit la preuve.  $\square$

On obtient d'après le Lemme 6.13 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.16. *Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on a  $\text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \lesssim \exp(-\epsilon|g_e|)$ .*

REMARQUE. Des arguments analogues montrent qu'on peut supposer que la constante  $R$  est suffisamment grande de sorte que, pour tout sommet  $v \in V(\Sigma)$  de stabilisateur fini,  $Q(v)$  soit contenu dans une boule de rayon  $R$ . Pour toute arête  $e \in \Delta(v)$  on a  $Q(e) \subset Q(v)$ . Donc En particulier, on a  $\text{dist}(1, Q(v)) = |g_e| + O(1)$  pour toute arête  $e \in \Delta(v)$ . En particulier,  $\Delta(v)$  est fini.

Si  $\gamma$  est une géodésique (plongement isométrique de  $\mathbb{R}$  dans  $Z$ ) de  $Z$ , on note  $\gamma_+ = \gamma(+\infty)$  et  $\gamma_- = \gamma(-\infty)$ . On dit que  $\gamma$  est asymptotique à  $x$  et  $y$ .

Soit  $C_0 \geq 1$  une constante uniforme qui dépend seulement de l'hyperbolicité de  $Z$ , telle que pour toute paire de points  $x$  et  $y$  de  $\partial Z$  et toute géodésique  $\gamma$  asymptotique à  $x$  et  $y$ , on ait

$$C_0^{-1} \exp(-\epsilon \text{dist}(1, \gamma)) \leq d_\epsilon(x, y) \leq C_0 \exp(-\epsilon \text{dist}(1, \gamma)). \quad (6.5.1)$$

Dans le lemme suivant on montre que toute géodésique asymptotique à un point de  $\partial Z(e)$  et à un point de  $-\partial Z(e)$  doit passer à une distance uniformément bornée de  $Q(e)$ .

LEMME 6.17. *Il existe une constante uniforme  $K$ , qui dépend seulement de l'hyperbolicité de  $G$ , telle que*

$$\text{dist}(\gamma, Q(e)) \leq K, \quad (6.5.2)$$

*pour toute arête  $e \in E(\Sigma)$ , toute paire de points  $x, y \in \partial Z$  avec  $x \in \partial Z(e)$  et  $y \in -\partial Z(e)$ , et toute géodésique  $\gamma$  de  $Z$  avec  $\gamma_+ = x$  et  $\gamma_- = y$ .*

DÉMONSTRATION. On considère  $\sigma_x : [0, +\infty) \rightarrow Z$  et  $\sigma_y : [0, +\infty) \rightarrow Z$  deux rayons géodésiques issus de  $1 \in Z$  tels que  $[\sigma_x] = x$  et  $[\sigma_y] = y$ . On note  $\{I_k\}_k$  et  $\{J_k\}_k$  les suites des arêtes de  $Z$  qui appartiennent à  $\sigma_x$  et à  $\sigma_y$  respectivement. Par hyperbolicité, il existe une constante uniforme  $K$  telle que  $\gamma$  est contenue dans le

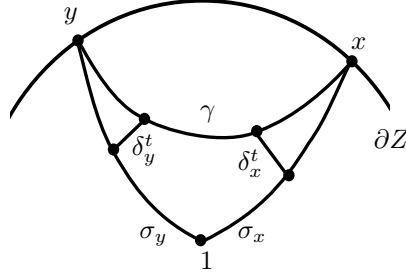


FIGURE 6.4. Démonstration du Lemme 6.17.

$K$ -voisinage de  $\sigma_x \cup \sigma_y$ . De plus, il existe une constante  $T < +\infty$ , qui dépend de  $x$  et  $y$ , telle que si  $t \in [T, +\infty)$  (resp.  $t \in (-\infty, -T]$ ) alors

$$\text{dist}_H(\gamma(t), \sigma_x) \leq K \text{ (resp. } \text{dist}(\gamma(t), \sigma_y) \leq K).$$

Pour  $t \geq T$  on considère la courbe

$$\gamma_t = \sigma_y^t * \delta_y^t * \gamma|_{[-t, t]} * \delta_x^t * \sigma_x^t,$$

où  $\delta_x^t$  (resp.  $\delta_y^t$ ) est un segment géodésique de longueur plus petit que  $K$ , qui joint  $\gamma(t)$  (resp.  $\gamma(-t)$ ) avec un point  $\sigma_x(u_t)$  (resp.  $\sigma_y(v_t)$ ); la courbe  $\sigma_x^t$  (resp.  $\sigma_y^t$ ) est donc la restriction de  $\sigma_x$  (resp.  $\sigma_y$ ) à l'intervalle  $[u_t, \infty)$  (resp.  $(-\infty, v_t]$ ). Voir la figure 6.4.

On remarque que pour tout sommet  $v \in V(\Sigma)$  on a  $M(v) \subset \Sigma(e)$  (resp.  $-\Sigma(e)$ ) dès que  $v \in -\Sigma(e)$  (resp.  $-\Sigma(e)$ ). Comme  $x \in \partial Z(e)$ , ou bien  $\phi(\sigma_x)$  est à distance bornée d'un rayon géodésique de  $\Sigma$  qui à partir d'un certain moment est contenu dans  $\Sigma(e)$ , ou bien il existe un sommet  $v \in \Sigma(e)$  tel qu'il existe une infinité de  $I_k$  tels que  $\phi(I_k) \cap M(v) \neq \emptyset$ . L'affirmation analogue est vraie pour  $y$ .

Dans tous les cas,  $\phi(\gamma_t)$  joint un point de  $-\Sigma(e)$  à un point de  $\Sigma(e)$ . En particulier,  $m(e)$  appartient à  $\phi(\gamma_t)$ , et donc  $\gamma_t \cap Q(e) \neq \emptyset$ . Soit  $p$  un point de l'intersection de  $\gamma_t$  avec  $Q(e)$ . On prend  $t$  suffisamment grand de sorte que  $p$  n'appartient pas à  $\sigma_x^t \cup \sigma_y^t$ . Alors dans ce cas,  $p$  ou bien appartient à  $\gamma$  ou bien à  $\delta_x^t \cup \delta_y^t$ . Donc on obtient un point de  $\gamma$  qui est à distance plus petite que  $K$  de  $p \in Q(e)$ .  $\square$

Cela nous permet de minorer la distance, dans  $\partial Z$ , entre  $\partial Z(e)$  et  $-\partial Z(e)$ .

LEMME 6.18. *Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on a  $\text{dist}_e(\partial Z(e), -\partial Z(e)) \gtrsim \exp(-\epsilon|g_e|)$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $x \in \partial Z(e)$  et  $y \in -\partial Z(e)$ . On considère une géodésique  $\gamma$  asymptotique à  $x$  et  $y$ . Alors  $\gamma$  est à distance uniformément borné de  $Q(e)$ ,

c'est-à-dire il existe  $w \in Q(e)$  tel que  $\text{dist}(w, \gamma) \leq K$  où  $K$  est la constante de l'inégalité (6.5.2). Alors on a

$$\text{dist}(1, \gamma) \leq \text{dist}(\gamma, w) + d(w, 1) \leq K + R + d + |g_e| := |g_e| + C.$$

Comme  $(x|y) = \text{dist}(1, \gamma) + O(1)$ , on obtient

$$d_\epsilon(x, y) \asymp \exp(-\epsilon(x|y)) \asymp \exp(-\epsilon \text{dist}(1, \gamma)) \gtrsim \exp(-\epsilon|g_e|).$$

Cela prouve le lemme.  $\square$

On peut améliorer les estimations précédentes. On commence par un lemme général pour les espaces uniformément parfaits. On rappelle que  $C_P$  désigne la constante de perfection uniforme.

LEMME 6.19. *Soit  $X$  un espace métrique uniformément parfait. Pour tout sous-ensemble non vide  $W$  de  $X$  on a*

$$\text{dist}(W, W \setminus X) \leq C_P \min\{\text{diam}W, \text{diam}(X \setminus W)\}. \quad (6.5.3)$$

DÉMONSTRATION. Si  $\text{diam}W \geq \text{diam}X/C_P$ , alors

$$\text{dist}(W, W \setminus X) \leq \text{diam}X \leq C_P \text{diam}W.$$

Soit  $W$  un sous-ensemble de  $X$  de diamètre plus petit que  $\text{diam}X/C_P$ . On note  $r = \text{diam}W$  et on considère  $x \in W$ . Comme  $W \subset B(x, r)$  et  $B(x, C_P r) \setminus B(x, r) \neq \emptyset$ , il existe  $y \in B(x, C_P r) \cap X \setminus W$ , et donc

$$\text{dist}(W, W \setminus X) \leq d(x, y) \leq C_P r = C_P \text{diam}W.$$

Par symétrie de (6.5.3), le lemme est montré.  $\square$

LEMME 6.20. *Pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$  on a*

$$\text{dist}_\epsilon(\partial Z(e), -\partial Z(e)) \asymp \exp(-\epsilon|g_e|).$$

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 6.18 il suffit de montrer la majoration. Mais comme  $\partial Z(e)$  et  $-\partial Z(e)$  sont l'un le complémentaire de l'autre, et qu'on a  $\text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \lesssim \exp(-\epsilon|g_e|)$ , on obtient le résultat d'après (6.5.3)  $\square$

On rappelle que si  $v$  est un sommet de  $V(\Sigma)$ , on note  $\Sigma_v(e)$  la composante connexe de  $\Sigma \setminus \{m(e)\}$  qui ne contient pas  $v$ , pour chaque arête  $e \in E(\Sigma)$ . Aussi on note  $Z_v(e) := \phi^{-1}(\Sigma_v(e))$ . Pour tout sommet  $v \neq v_0$  de  $V(\Sigma)$ , il existe seulement une arête  $e_v \in \Delta(v)$  telle que  $\partial Z_v(e_v) = -\partial Z(e_v)$ ; i.e. telle que  $\partial Z_v(e_v)$  contient  $v_0$ . On note  $\Delta^*(v) = \Delta(v) \setminus \{e_v\}$ .

LEMME 6.21. *Soit  $v$  un sommet de  $V(\Sigma)$  de stabilisateur fini. Alors pour toute paire d'arêtes  $e, e' \in \Delta^*(v)$  on a*

$$\text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), \partial Z_v(e')) \asymp \exp(-\epsilon|g_e|). \quad (6.5.4)$$

DÉMONSTRATION. On sait d'après la remarque qui suit le Corollaire 6.16 que  $|g_e| = |g_{e'}| + O(1)$ . De plus, comme  $\partial Z_v(e') \subset -\partial Z_v(e)$ , d'après le Lemme 6.20 on a

$$\text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), \partial Z_v(e')) \geq \text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), -\partial Z_v(e)) \asymp \exp(-\epsilon|g_e|).$$

Donc il suffit de montrer la majoration. Soient  $x$  un point de  $\partial Z_v(e)$  et  $y$  un point de  $\partial Z_v(e')$ . Alors les rayon géodésiques issus de 1  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  qui représentent  $x$  et  $y$ , doivent passer par  $x_v \in Q(e)$  et  $y_v \in Q(e')$  respectivement. Comme ces deux ensembles sont contenus dans  $Q(v)$ , qui à la fois est contenu dans une boule de rayon  $R$ , il existe une géodésique  $\sigma_v$  de longueur plus petite que  $2R$  qui joint  $x_v$  et  $y_v$ . Soit  $\gamma_{x,y} := \sigma_y * \sigma_v * \sigma_x$  la concatenation de ces géodésiques. Alors par l'hyperbolicité de  $Z$ , il existe une constante  $K$  et une géodésique  $\gamma$  de  $Z$ , asymptotique à  $x$  et  $y$ , telles que  $\text{dist}_H(\gamma, \gamma_{x,y}) \leq K$ . Alors

$$\text{dist}(1, \gamma) \geq \text{dist}(1, Q(v)) - (2R + K) = |g_e| + O(1).$$

Donc  $d_\epsilon(x, y) \lesssim \exp(-\epsilon|g_e|)$ . Ceci prouve le lemme.  $\square$

Dans la suite on va avoir besoin du fait suivant (voir [BonK02a] Lemme 3.2) : si  $\phi : \partial Z \rightarrow \partial Z$  est un homéomorphisme  $\eta$ -quasimöbius alors il existe un homéomorphisme croissant  $\hat{\eta} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , qui dépend seulement de  $\eta$ , tel que pour tous sous-ensembles  $E$  et  $F$  de  $\partial Z$ , compacts et disjoints, on a

$$\Delta_\epsilon(\phi(E), \phi(F)) \leq \hat{\eta}(\Delta_\epsilon(E, F)), \quad (6.5.5)$$

où on rappelle que

$$\Delta_\epsilon(E, F) = \frac{\text{dist}_\epsilon(E, F)}{\min\{\text{diam}_\epsilon E, \text{diam}_\epsilon F\}},$$

est la distance relative entre  $E$  et  $F$ . En particulier, comme  $G$  agit par des homéomorphismes  $\eta$ -quasimöbius sur  $\partial Z$ , l'inégalité (6.5.5) est vraie si on remplace  $\phi$  par  $g$  pour tout  $g \in G$ . Finalement on peut prouver l'estimation principale de cette section.

LEMME 6.22. *Pour tout sommet  $v \in V(\Sigma)$  tel que son ensemble limite  $\Lambda_v$  est non vide, et toute arête  $e \in \Delta(v)$  on a*

$$\text{dist}_\epsilon(\Lambda_v, \partial Z_v(e)) \lesssim \min\{\text{diam}_\epsilon \Lambda_v, \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e)\}. \quad (6.5.6)$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que  $E_0 = \{e_1, \dots, e_N\}$  est un ensemble des représentants de  $E(\Sigma)/G$ . Comme pour tout  $i$  on a  $\Lambda_{v_i} \cap \partial Z_v(e_i) = \emptyset$  où  $v_i$  est une extrémité de  $e_i$ , alors les compacts  $\Lambda_{v_i}$  et  $\partial Z_{v_i}(e_i)$  sont disjoints. Si  $\Lambda_{v_i}$  est non vide, on obtient

$$\delta(e_i, v_i) := \Delta_\epsilon(\Lambda_{v_i}, \partial Z_{v_i}(e_i)) \in (0, +\infty).$$

On pose  $\delta = \max\{\delta(e_i, v_i)\}$  où le maximum est pris sur toutes les arêtes  $e_i \in E_0$  et toutes leurs extrémités  $v_i$  qui ont l'ensemble limite non vide. Soient  $e$  une arête de  $E(\Sigma)$  et  $v$  une extrémité de  $e$ . Alors il existe  $e_i \in E_0$  et  $v_i$  une extrémité de  $e_i$  tels que  $g_e \cdot e_i = e$  et  $g_e \cdot v_i = v$ . On remarque que  $g_e \cdot \Lambda_{v_i} = \Lambda_v$  et  $g_e \cdot \partial Z_{v_i}(e_i) = \partial Z_v(e)$ . Alors d'après l'inégalité (6.5.5)

$$\Delta_\epsilon(\Lambda_v, \partial Z_v(e)) = \Delta_\epsilon(g_e \cdot \Lambda_{v_i}, g_e \cdot \partial Z_{v_i}(e_i)) \leq \hat{\eta}(\Delta_\epsilon(\Lambda_{v_i}, \partial Z_{v_i}(e_i))) \leq \hat{\eta}(\delta).$$

Finalement ceci implique

$$\text{dist}_\epsilon(\Lambda_v, \partial Z_v(e)) \leq \hat{\eta}(\delta) \cdot \min\{\text{diam}_\epsilon \Lambda_v, \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e)\}.$$

□

On remarque qu'en particulier l'inégalité (6.5.6) implique que pour toute arête  $e$  de  $E(\Sigma)$  et toute extrémité  $v$  de  $e$  d'ensemble limite non vide, on a

$$\text{dist}_\epsilon(\Lambda_v, \partial Z_v(e)) \lesssim \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e).$$

LEMME 6.23. *Pour chaque  $n$  on note  $r_n = \exp(-\epsilon n)$ . Il existe une constante  $C_1 \geq 1$ , telle que pour tout  $n \geq 1$  il existe un recouvrement*

$$\mathcal{U}_n := \{W_1, \dots, W_N\}$$

tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  on a :

- $\text{dist}_\epsilon(\partial W_j, \partial Z \setminus \partial W_j) \geq C_1^{-1} r_n$ , et
- ou bien il existe un sommet  $v_j$  de  $V(\Sigma)$  tel que  $\Lambda_{v_j} \subset W_j \subset V_{C_1 \cdot r_n}(\Lambda_{v_j})$ , ou bien il existe un point  $x_j \in W_j$  tel que  $W_j \subset B_\epsilon(x_j, C_1 r_n)$

DÉMONSTRATION. On rappelle qu'à chaque arête  $e$  de  $E(\Sigma)$  on a associé un élément  $g_e \in G$  tel que  $\text{dist}(1, Q(e)) = |g_e| + O(1)$ , et que pour chaque sommet  $v \neq v_0$  de  $V(\Sigma)$  il existe une unique arête  $e_v \in \Delta(v)$  telle que  $\partial Z_v(e) = -\partial Z(e)$ . On rappelle enfin qu'on a noté  $\Delta^*(v) = \Delta(V) \setminus \{e_v\}$ . Aussi d'après le Corollaire 6.16 et les Lemmes 6.20 et 6.22, pour tout  $v \in V(\Sigma)$  d'ensemble limite non vide, et toute

arête  $e \in \Delta^*(v)$  on a

$$\begin{aligned} \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) &\lesssim \exp(-\epsilon|g_e|) \lesssim \text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), -\partial Z_v(e)) \\ &\leq \text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), \Lambda_v) \lesssim \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e), \end{aligned}$$

et donc ces quantités sont toutes comparables. De manière analogue d'après le Lemme 6.21, si  $v$  est un sommet de stabilisateur fini, alors pour toute paire d'arêtes  $e, e' \in \Delta^*(v)$  on a

$$\text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), \partial Z_v(e')) \asymp \exp(-\epsilon|g_e|).$$

On note  $C$  une constante uniforme qui majore les constantes de comparaison de ci-dessus. Pour  $n \geq 1$  on note  $B_n := B_Z(1, n)$  la boule de  $Z$  centrée en 1 et de rayon  $n$ . On considère  $E_n$  l'ensemble des arêtes  $e \in E$  telles que  $g_e \in B_n$ , et soit  $\Sigma_n$  l'enveloppe convexe de  $E_n$ . Alors  $\Sigma_n$  est un sous-arbre fini de  $\Sigma$ .

On peut supposer sans perte de généralité que  $v_0 \in \Sigma_n$ . En effet, supposons que pour toute arête  $e \in \Delta(v_0)$  on a  $|g_e| > n$ . Si  $\Lambda_{v_0}$  est non vide, on obtient

$$\max \{ \text{diam}_\epsilon \partial Z(e), \text{dist}_\epsilon(\partial Z(e), \Lambda_{v_0}) \} \leq C \exp(-\epsilon|g_e|) \leq Cr_n. \quad (6.5.7)$$

Mais ceci implique que pour toute arête  $e \in \Delta(v_0)$  on a  $\partial Z(e) \subset V_{2Cr_n}(\Lambda_{v_0})$ , et donc  $\partial Z = V_{2Cr_n}(\Lambda_{v_0})$ . Si  $G(v_0)$  est fini, alors  $\Delta(v_0)$  est fini, et pour toute arête  $e \in \Delta(v_0)$  on a  $\text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \leq Cr_n$ . Dans ce cas il suffit de prendre  $W(e) = \partial Z(e)$  pour chaque  $e \in \Delta(v_0)$  pour obtenir le recouvrement recherché.

Donc on peut supposer qu'au moins une arête  $e$  de  $\Delta(v_0)$  appartient à  $E_n$ , et donc en particulier que  $v_0 \in \Sigma_n$ .

De cette façon, pour tout sommet  $v$  de  $\Sigma$  l'arête  $e_v$  appartient à  $\Sigma_n$ , et donc  $\Delta(v) \setminus E(\Sigma_n) \subset \Delta^*(v)$ . En particulier, pour toute arête  $e \in \Delta(v) \setminus E(\Sigma_n)$  on a  $\partial Z_v(e) = \partial Z(e)$ .

On affirme que pour toute arête  $e$  de  $\Sigma_n$  on a  $|g_e| \leq n + O(1)$  (de manière équivalente  $\text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \gtrsim r_n$ ). En effet, si  $e$  est une arête de  $\Sigma_n$  qui n'appartient pas à  $E_n$ , alors dans  $\Sigma(e)$  il existe une arête  $f \in E_n$ . Comme  $\partial Z(f) \subset \partial Z(e)$  on obtient

$$C^{-1}r_n \leq C^{-1} \exp(-\epsilon|g_f|) \leq \text{diam}_\epsilon \partial Z(f) \leq \text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \leq C \exp(-\epsilon|g_e|),$$

et donc  $|g_e| \leq n + 2\epsilon^{-1} \log(C)$ .

Pour chaque sommet  $v$  de  $\Sigma_n$ , on note  $E_n(v)$  les arêtes de  $\Sigma_n$  qui sont incidentes à  $v$ . On pose

$$W(v) := \Lambda_v \cup \bigcup_{e \in \Delta(v) \setminus E_n(v)} \partial Z_v(e) = \partial Z \setminus \bigcup_{e \in E_n(v)} \partial Z_v(e).$$



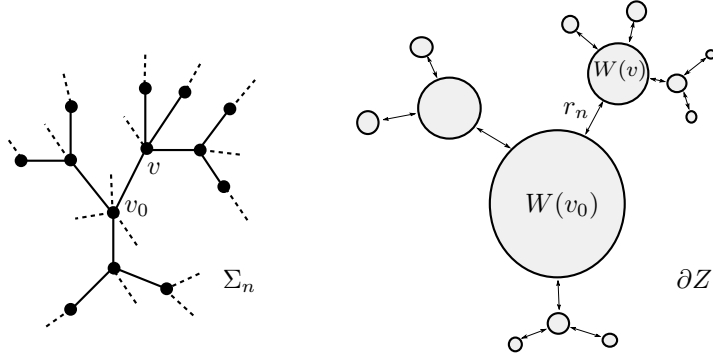


FIGURE 6.5. Construction du recouvrement dans la démonstration du Lemme 6.23.

Premier cas : Supposons que  $\Lambda_v \neq \emptyset$ . Pour chaque arête  $e \in \Delta(v) \setminus E_n(v)$ , de manière analogue à (6.5.7), on a

$$\max \{ \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e), \text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), \Lambda_v) \} \leq C \exp(-\epsilon |g_e|) \leq C r_n,$$

car  $g_e \notin B_n$ . Alors on obtient  $\partial Z_v(e) \subset V_{2Cr_n}(\Lambda_v)$ , et comme  $e \in \Delta(v) \setminus E_n(v)$  est arbitraire on a  $W(v) \subset V_{2Cr_n}(\Lambda_v)$ .

Deuxième cas : Supposons que  $\Lambda_v = \emptyset$ . Soit  $e \in \Delta(v) \setminus E_n(v)$  une arête quelconque. Pour toute autre arête  $e' \in \Delta(v) \setminus E_n(v)$  on a

$$\text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), \partial Z_v(e')) \asymp \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) \asymp \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e') \lesssim r_n.$$

Donc si on choisit un point quelconque  $x_v \in \partial Z_v(e)$ , on obtient que  $W(v) \subset B_\epsilon(x_v, 2Cr_n)$ .

Aussi comme pour chaque arête  $e \in E_n(v)$  on a

$$\text{dist}_\epsilon(\partial Z_v(e), -\partial Z_v(e)) \geq C^{-1} \exp(-\epsilon |g_e|) \geq C^{-3} r_n.$$

Finalement, comme  $W(v) \subset -\partial Z_v(e)$ , on obtient  $\text{dist}_\epsilon(W(v), \partial Z \setminus W(v)) \geq C^{-3} r_n$ . Donc finalement on obtient un recouvrement fini de

$$\partial Z = \bigcup_{v \in \Sigma_n} W(v),$$

où pour chaque  $v \in \Sigma_n$  d'ensemble limite non vide on a  $\Lambda_v \subset W(v) \subset V_{2Cr_n}(\Lambda_v)$ , et sinon il existe un point  $x_v \in W(v)$  tel que  $W(v) \subset B_\epsilon(x_v, 2Cr_n)$ . De plus la distance de chaque élément de ce recouvrement à son complémentaire est minorée par  $C^{-3} r_n$ . Cela finit la preuve.  $\square$

## 6. Démonstration du Théorème 6.5

Dans cette section on donne la démonstration du Théorème 6.5 sur la condition BR pour le bord d'un groupe hyperbolique à un bout :

**THÉORÈME.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout. Si  $G$  est un groupe fuchsien cocompact, ou si dans le scindement JSJ de  $G$  il n'y a pas de sommets de type rigide, alors  $\partial G$  vérifie la propriété BR.*

A partir de maintenant on suppose que  $G$  est un groupe hyperbolique à un bout ( $\partial Z$  est connexe) qui n'est pas un groupe fuchsien cocompact, et que tous les stabilisateurs  $G(e)$  des arêtes  $e \in E(\Sigma)$  sont virtuellement cycliques (infinis). En particulier, tous les stabilisateurs des arêtes sont quasiconvexes. L'ensemble limite  $\Lambda_e$  de  $e \in E(\Sigma)$  consiste en exactement deux points qui sont les points fixes de tout élément d'ordre infini dans  $G(e)$ .

**6.1. Le points de coupure locale et le scindement JSJ.** D'après les travaux de Bowditch et Swarup on sait que  $\partial Z$  est un espace métrique localement connexe et sans points de coupure globale. Deux conséquences importantes de cela sont les suivantes :

- Si  $F \subset \partial Z$  est un ensemble fermé avec au moins deux points, alors toutes les composantes connexes de  $\partial Z \setminus F$  ont au moins deux points dans sa frontière.
- Si  $A$  et  $B$  sont deux fermés disjoints de  $\partial Z$ , alors il y a seulement une quantité finie de composantes connexes  $U$  de  $\partial Z \setminus (A \cup B)$  telles que  $\overline{U} \cap A \neq \emptyset$  et  $\overline{U} \cap B \neq \emptyset$ .

La structure des points de coupure locale d'un groupe hyperbolique à un bout est très particulière.

**DÉFINITION 6.24.** *Si  $x \in \partial Z$  on définit la valence de  $x$ , qu'on note  $\text{val}(x)$ , par le nombre de bouts de  $\partial Z \setminus \{x\}$ . On peut définir  $\text{val}(x)$  comme étant la limite de  $b_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , où  $b_n$  est égale à la quantité de composantes connexes de la boule pointée  $B(x, 1/n) \setminus \{x\}$  qui ont  $x$  dans leur clôture. Donc  $x \in \partial Z$  est un point de coupure locale si et seulement si  $\text{val}(x) \geq 2$ .*

D'après [Bow98a] Proposition 5.5, la valence  $\text{val}(x) < \infty$  pour tout  $x \in \partial Z$ . On partitionne les points de coupure locale de  $\partial Z = \partial Z(2) \cup \partial Z(3+)$ , où  $\partial Z(2)$  (resp.  $\partial Z(3+)$ ) est l'ensemble des points de coupure locale  $x$  de  $\partial Z$ , tels que  $\text{val}(x) = 2$  (resp.  $\text{val}(x) \geq 3$ ).

Si  $x, y \in \partial Z$  on note  $N(x, y)$  la quantité de composantes connexes de  $\partial Z \setminus \{x, y\}$ . Comme toute composante connexe  $U$  de  $\partial Z \setminus \{x, y\}$  vérifie  $\bar{U} = U \cup \{x, y\}$ , on a  $N(x, y) \leq \min\{\text{val}(x), \text{val}(y)\}$ .

On note  $-\Sigma(e)$  la composante connexe de  $\Sigma \setminus \{m(e)\}$  qui contient  $v_0$  et  $-Z(e) = \phi^{-1}(-\Sigma(e))$ . Soit  $\pm\partial\Sigma(e)$  l'ensemble des rayons de  $\Sigma$  qui sont contenus dans  $\pm\Sigma(e)$  à partir d'un certain moment. Alors, comme dans la Proposition 6.14 on peut identifier

$$\pm\partial Z(e) := \pm\overline{Z(e)} \setminus \pm Z(e) = \pm\partial\Sigma(e) \cup \bigcup_{v \in V(\pm\Sigma(e))} \Lambda_v \subset \partial Z. \quad (6.6.1)$$

Soient  $v$  et  $w$  deux sommets de  $V(\Sigma)$ , avec  $v \in V(\Sigma(e))$  et  $w \in V(-\Sigma(e))$ . Alors  $\Lambda_v \cap \Lambda_w$  est égale à  $\Lambda_e$  ou vide. En particulier, les ensembles  $\pm\partial Z(e)$  sont des sous-ensembles fermés  $G(e)$ -invariants de  $\partial Z$ , tels que  $-\partial Z(e) \cap \partial Z(e) = \Lambda_e$  et  $-\partial Z(e) \cup \partial Z(e) = \partial Z$ .

Les ensembles  $\pm\partial Z(e) \setminus \Lambda_e = \partial Z \setminus (\mp\partial Z(e))$  sont des ouverts de  $\partial Z$  et leur frontière topologique est  $\Lambda_e$ . Cela nous donne une partition de  $\partial Z \setminus \Lambda_e$  en deux ouverts non vides et disjoints. Donc  $\Lambda_e$  sépare le bord de  $Z$ , et les deux points de  $\Lambda_e$  sont des points des coupure locale. Il y a seulement une quantité finie de composantes connexes de  $\partial Z \setminus \Lambda_e$ , et toute composante a comme frontière  $\Lambda_e$ . En particulier,  $\pm\partial Z(e)$  est égal à une réunion de clôtures de composantes connexes de  $\partial Z \setminus \Lambda_e$  rattachées par  $\Lambda_e$ . Donc on obtient

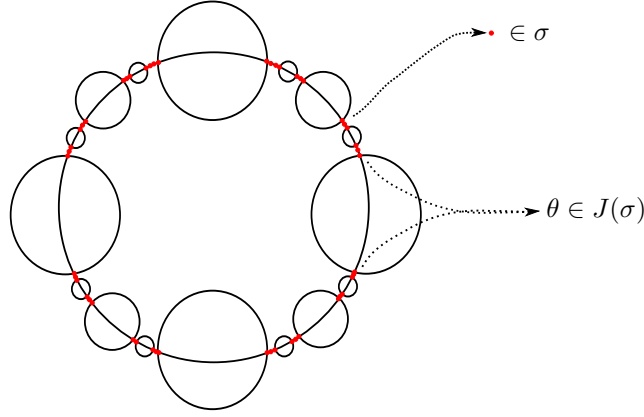
LEMME 6.25. *Les ensembles  $\pm\partial Z(e)$  sont connexes.*

Soit maintenant  $\Sigma$  l'arbre du scindement JSJ de  $G$ . Alors on note leurs sommets  $V(\Sigma)$  par  $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ , qui sont respectivement les sommets de type virtuellement cyclique, surface et rigide.

Les sommets de type rigide ( $V_3$ ) correspondent à des sous-groupes non élémentaires et non  $V_2$  dont l'ensemble limite ne peut être séparé par deux points de  $\partial Z$  et  $\Lambda_v$  est maximal pour cette propriété.

Pour décrire les ensembles limites des sommets de type surface on utilise la notion d'ordre cyclique (voir [Bow98a] Section 2).

DÉFINITION 6.26. *Pour  $x, y, z, w \in \partial Z$  on note  $\delta(x, y, z, w)$  si  $\{x, z\}$  sépare  $y$  de  $w$  dans  $\partial Z$ . On dit qu'un sous-ensemble  $\sigma$  de  $\partial Z$  (de cardinal au moins 4) admet un ordre cyclique s'il existe un plongement continu  $\iota : \sigma \rightarrow S^1$  tel que  $\delta(x, y, z, w)$  si et seulement si  $\{\iota(x), \iota(z)\}$  sépare  $\iota(y)$  de  $\iota(w)$  en  $S^1$ . Donc on peut identifier  $\sigma$  avec  $\iota(\sigma)$ , qui est un sous-ensemble de  $S^1$ .*

FIGURE 6.6. Description d'un ensemble cyclique  $\sigma$  et de ses sauts  $J(\sigma)$ .

L'ensemble limite  $\Lambda_v$  d'un sommet de type surface  $v \in V_2$  est un ensemble de Cantor. La relation  $\delta$  induit un ordre cyclique sur  $\Lambda_v$ , et  $\Lambda_v$  est maximal pour cette propriété. Le stabilisateur de  $\Lambda_v$  pour l'action de  $G$  sur  $\partial Z$  est le même que le stabilisateur de  $v$  pour l'action de  $G$  sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire  $G(v)$ . Le sous-groupe  $G(v)$  de  $G$  est dit MHF (maximal hanging Fuchsian).

**DÉFINITION 6.27.** Soit  $v \in V_2$ . On dit qu'une paire de points  $\theta = \{x, y\}$  de  $\Lambda_v$  est un saut, si aucune paire  $\{z, w\}$  de  $\Lambda_v \setminus \{x, y\}$  ne sépare  $x$  de  $y$ . On note  $J(v)$  l'ensemble des sauts de  $\Lambda_v$ .

Il y a une bijection naturelle entre les arêtes de  $\Sigma$  incidentes à  $v$ , et les sauts  $J(v)$ . De plus, les stabilisateurs des arêtes de  $\Sigma$  incidentes à  $v$  (les sous-groupes périphériques) sont précisément les stabilisateurs de sauts de  $\Lambda_v$  dans  $G(v)$ .

Pour chaque saut  $\theta = \{x, y\} \in J(v)$  on a  $N(x, y) \geq 2$ , et il existe une composante connexe  $U_\theta$  de  $\partial Z \setminus \theta$  telle que  $\Lambda_v \subset \overline{U_\theta}$ . On note  $\mathcal{U}_\theta$  l'ensemble de toutes les composantes connexes de  $\partial Z \setminus \theta$  à exception de  $U_\theta$ ; c'est-à-dire, celles disjointes de  $\Lambda_v$ . Alors d'après ([Bow98a], Lemma 2.3), si on note  $\mathcal{U}(v)$  l'ensemble de composantes connexes de  $\partial Z \setminus \Lambda_v$ , on a

$$\mathcal{U}(v) = \bigcup_{\theta \in J(v)} \mathcal{U}_\theta. \quad (6.6.2)$$

Si  $\theta = \{x, y\}$  est un saut de  $\Lambda_v$ , alors ou bien  $x, y \in \partial Z(2)$  ou bien  $x, y \in \partial Z(3+)$ , et dans les deux cas on a  $N(x, y) = \text{val}(x) = \text{val}(y)$ . De plus, il existe un élément loxodromique  $g \in G$  tel que  $\theta = \text{fix}(g)$ . On note  $J_0(v)$  l'ensemble de sauts qui sont dans  $\partial Z(3+)$ . Il faut remarquer, que comme  $\Lambda_v$  n'a pas de points isolés, deux sauts différents sont disjoints.

Une propriété importante est qu'on peut partitionner  $\partial Z(3+)$  en une réunion disjointe de paires  $\{x, y\}$  tels que  $N(x, y) = \text{val}(x) = \text{val}(y)$ . On remarque que si  $x \in \partial Z(2)$  n'est pas dans  $\Lambda_v$  pour tout  $v \in V_2$ , alors il existe un unique  $y \in \partial Z(2)$  tel que  $G(\{x, y\})$  est un sommet de type élémentaire ( $V_1$ ). Les autres sommets de  $V_1$  proviennent de l'intersection entre les ensembles limites des sommets de type rigide avec ceux des sommets de type surface.

Pour ces deux types de paires de points  $\theta$  de  $\partial Z$ , qui correspondent à des sommets  $v \in V_1$ , il existe une bijection naturelle entre  $\mathcal{U}(\theta)$ , l'ensemble de composantes connexes de  $\partial Z \setminus \theta$ , et  $\Delta(v)$  l'ensemble des arêtes de  $\Sigma$  incidentes à  $v$ .

Si  $v$  et  $w$  sont deux sommets de  $V_2$ , alors  $\Lambda_v \cap \Lambda_w = J_0(v) \cap J_0(w)$ . Si  $\theta$  est un saut de  $\Lambda_v$  qui n'appartient pas à  $J_0(v)$ , alors  $\partial Z \setminus \theta$  a exactement deux composantes connexes, une qui contient  $\Lambda_v$  dans sa clôture, et l'autre qui nécessairement doit contenir dans sa clôture l'ensemble limite d'un sommet de type rigide.

**6.2. Quelques lemmes généraux sur les sommets de type surface.** Soient  $\Sigma$  l'arbre JSJ et  $v$  un sommet dans  $V_2$ , c'est-à-dire de type surface. Donc il existe un plongement continu qui préserve l'ordre cyclique  $\iota : \Lambda_v \rightarrow S^1$ . Les sauts de  $\Lambda_v$  sont alors en correspondance bijective avec les intervalles ouverts du complémentaire de  $\iota(\Lambda_v)$  dans  $S^1$ . Pour chaque paire  $\theta \in J(v)$  on note  $I_\theta = (x_\theta, y_\theta)$  l'intervalle ouvert de  $S^1 \setminus \iota(\Lambda_v)$  défini par  $\iota(\theta)$ . Comme les sauts  $J(v)$  sont denses dans  $\Lambda_v$ , les intervalles  $\{I_\theta : \theta \in J(v)\}$  sont denses dans  $S^1$ .

Etant donnée une quantité finie de sauts  $\theta_1, \dots, \theta_n \in J(v)$ , les composantes connexes de  $S^1 \setminus I_{\theta_1} \cup \dots \cup I_{\theta_n}$  sont des intervalles fermés et leur réunion contient  $\iota(\Lambda_v)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que les  $\{\theta_i\}$  sont ordonnés cycliquement de la même façon que les points de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Donc les composantes connexes du complémentaire de  $I_{\theta_1} \cup \dots \cup I_{\theta_n}$  sont  $F_i = [y_{\theta_i}, x_{\theta_{i+1}}]$  pour  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On note  $\Lambda_v(i) = \iota^{-1}(F_i)$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les ensembles  $\Lambda_v(i)$  sont des fermés disjoints et leur réunion est égale à  $\Lambda_v$ .

**LEMME 6.28.** *Soit  $v \in V_2$  un sommet de type surface. Alors, pour tout  $\delta > 0$ , il existe une quantité finie de sauts  $\theta_1, \dots, \theta_n \in J(v)$  telle que  $\text{diam}_\epsilon \Lambda_v(i) \leq \delta$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\eta > 0$  que l'on fixera plus tard. Soient  $L_1, \dots, L_m$  des intervalles fermés de  $S^1$  de diamètre plus petit ou égal à  $\eta/2$ , tels que  $S^1 = L_1 \cup \dots \cup L_m$  et tels que les intérieurs des  $L_j$  sont deux à deux disjoints. Comme les intervalles  $\{I_\theta : \theta \in J(v)\}$  sont denses dans  $S^1$ , il existe une quantité finie de paires  $\theta_1, \dots, \theta_n \in J(v)$ , tels que pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$  il existe un  $i_j \in \{1, \dots, n\}$

avec  $\text{int}(L_j) \cap I_{\theta_{i_j}} \neq \emptyset$ . Donc tout intervalle  $F_i$  du complémentaire de  $I_{\theta_1} \cup \dots \cup I_{\theta_n}$  est contenu dans la réunion de deux intervalles  $L_j$  consécutifs. En particulier, le diamètre de chaque  $F_i$  dans  $S^1$  est plus petit ou égal à  $\eta$ .

Comme  $\iota(\Lambda_v)$  est un sous-ensemble fermé de  $S^1$  et  $\iota : \Lambda_v \rightarrow \iota(\Lambda_v)$  est un homéomorphisme, son inverse  $h : \iota(\Lambda_v) \rightarrow \Lambda_v$  est uniformément continu. Donc, étant donné  $\delta > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que si  $x, y \in \iota(\Lambda_v)$  avec  $d(x, y) < \eta$ , alors  $d_\epsilon(h(x), h(y)) < \delta$ . En particulier,

$$\text{diam}_\epsilon \Lambda_v(i) = \text{diam}_\epsilon h(F_i \cap \iota(\Lambda_v)) \leq \delta.$$

□

On rappelle que  $\Delta(v)$  est l'ensemble des arêtes de  $\Sigma$  qui sont incidentes à  $v$ . Chaque arête  $e \in \Delta(v)$  correspond de façon unique à un saut  $\theta \in J(v)$ . Avec cette notation, étant donnés des arêtes  $e_1, \dots, e_n \in \Delta(v)$ , on note  $\Delta_i(v)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , les arêtes  $e$  incidentes à  $v$  telles que  $\Lambda_e \subset \Lambda_v(i)$ . Naturellement

$$\Delta(v) = \{e_1, \dots, e_n\} \cup \bigcup_{i=1}^n \Delta_i(v),$$

est une partition de l'ensemble des arêtes incidentes à  $v$ . Pour chaque arête  $e \in \Delta(v)$ , on note  $\Sigma_v(e)$  la composante connexe de  $\Sigma \setminus \{m(e)\}$  qui ne contient pas  $v$ . On note aussi  $Z_v(e) = \phi^{-1}(\Sigma_v(e))$  et  $\partial Z_v(e) \setminus Z_v(e)$ . On remarque que pour toutes les arêtes de  $\Delta(v)$  sauf une, on a  $\Sigma(e) = \Sigma_v(e)$ . En particulier, d'après le Lemme 6.13 on a aussi  $\text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) \rightarrow 0$  pour  $e \in \Delta(v)$ . Soit

$$K_i(v) = \Lambda_v(i) \cup \bigcup_{e \in \Delta_i(v)} \partial Z_v(e) \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

LEMME 6.29. *Les ensemble  $\{K_i(v) : i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$  sont fermés, connexes et deux à deux disjoints.*

DÉMONSTRATION. En effet, si  $x \notin K_i(v)$ , alors comme en particulier  $x \notin \Lambda_v(i)$ , on a  $\text{dist}_\epsilon(\Lambda_v(i), x) = \delta > 0$ . Si  $e \in \Delta_i(v)$  est telle que  $\partial Z_v(e) \cap B_\epsilon(x, \delta/2) \neq \emptyset$ , alors comme  $\partial Z_v(e) \cap \Lambda_v(i) \neq \emptyset$ , on a  $\text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) \geq \delta/2$ . Donc, il y a seulement une quantité finie d'arêtes  $e \in \Delta_i(v)$  telles que  $\partial Z_v(e) \cap B_\epsilon(x, \delta/2) \neq \emptyset$ . Comme chaque  $\partial Z_v(e)$  est fermé, on a  $\text{dist}(x, K_i(v)) > 0$ , et donc  $K_i(v)$  est fermé.

Il sont deux à deux disjoints, car les  $\Lambda_v(i)$  le sont, et deux ensembles  $\partial Z_v(e)$  et  $\partial Z_v(e')$  peuvent s'intersecter seulement dans les sauts associés aux arêtes  $e$  et  $e'$ , qui sont disjoints.

Comme pour chaque saut de  $\Lambda_i(v)$  on rajoute  $\partial Z_v(e)$ , qui d'après le Lemme 6.25 est un ensemble connexe,  $K_i(v)$  est connexe. □

Comme le diamètre de  $\partial Z_v(e)$  tend vers zéro pour  $e \in \Delta_i(v)$ , on a

$$\text{diam}_\epsilon K_i(v) \leq \text{diam}_\epsilon \Lambda_v(i) + 2 \cdot \max \{ \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) \}. \quad (6.6.3)$$

De plus, pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\partial Z_v(e_j) \cap K_i(v) \neq \emptyset$  si et seulement si,  $i \in \{j-1, j\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, l'intersection est l'un des deux points de  $\Lambda_{e_j}$ . Donc on peut décomposer le bord de  $G$  comme

$$\partial Z = \partial Z_v(e_1) \cup K_1(v) \cup \dots \cup \partial Z_v(e_n) \cup K_n(v), \quad (6.6.4)$$

et deux ensembles de cette décomposition sont ou bien disjoints ou bien s'intersectent en un point (d'un ensemble limite  $\Lambda_{e_j}$ ).

**LEMME 6.30.** *Soit  $v \in V_2$  un sommet de type surface. Alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe une quantité finie de sauts  $\theta_1, \dots, \theta_n \in J(v)$  telle que  $\text{diam}_\epsilon K_i(v) \leq \delta$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\delta > 0$ . Il existe un sous-ensemble fini  $E_1 \subset \Delta(v)$ , tel que si  $e \in \Delta(v) \setminus E_1$  alors  $\text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) \leq \delta/4$ . Aussi d'après le Lemme 6.28, il existe un sous-ensemble fini  $E_2 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \Delta(v)$ , qu'on peut supposer contenant  $E_1$ , tel que  $\text{diam}_\epsilon \Lambda_v(i) \leq \delta/2$ . Donc, d'après (6.6.3), on a  $\text{diam}_\epsilon K_i(v) \leq \text{diam}_\epsilon \Lambda_v(i) + 2 \cdot \max \{ \text{diam}_\epsilon \partial Z_v(e) \} \leq \delta/2 + 2 \cdot \delta/4 = \delta$ .  $\square$

**6.3. Démonstration du Théorème 6.5.** On suppose maintenant, que dans l'arbre  $\Sigma$  du scindement JSJ, il n'y a pas de sommets de type rigide. Dans ce cas, si  $\Lambda_v$  est l'ensemble limite associé à un sommet  $v$  de type surface, alors les sauts de  $\Lambda_v$  sont tous des paires de points dans  $\partial Z(3+)$ ; c'est-à-dire  $J(v) = J_0(v)$ . Tous les sommets de  $\Sigma$  sont de type surface et de type virtuellement cyclique. Donc ces derniers sont nécessairement des paires de points dans  $\partial Z(3+)$ . Si  $e \in E(\Sigma)$  est une arête d'extrémités  $v$  et  $w$ , alors  $v$  ou  $w$  est un sommet de type surface et l'autre est de type virtuellement cyclique.

**PROPOSITION 6.31.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique à un bout qui n'est pas un groupe fuchsien cocompact. Supposons que dans le scindement JSJ de  $G$ , il n'y a pas de sommet de type rigide, et soit  $\Sigma$  l'arbre JSJ de  $G$ . Alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe une quantité finie  $\{e_1, \dots, e_N\}$  d'arêtes de  $\Sigma$ , telles que*

$$\max \{ \text{diam}_\epsilon U : U \in \mathcal{U} \} \leq \delta,$$

où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble de composantes connexes de  $\partial Z \setminus P$ , et  $P = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_{e_i}$ . En particulier,  $\partial Z$  vérifie la propriété BR.

DÉMONSTRATION. Soit  $\delta > 0$ . On fixe  $v_0 \in V(\Sigma)$  un sommet de type surface. Considérons l'ensemble  $E_\delta$  des arêtes  $e \in E(\Sigma)$  telles que  $\text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \geq \delta$ . D'après le Lemme 6.13,  $E_\delta$  est un ensemble fini.

Soit  $V_\delta$  la réunion de  $\{v_0\}$  et des sommets des arêtes de  $E_\delta$ . Soit  $\Sigma_\delta$  l'enveloppe convexe de  $V_\delta$ . Alors  $\Sigma_\delta$  est un sous-arbre fini de  $\Sigma$ .

Si  $w \in V(\Sigma_\delta) \cap V_1$ , comme la valence de  $w$  dans  $\Sigma$  est finie on peut rajouter à  $\Sigma_\delta$  toutes les arêtes incidentes à  $w$ , de sorte que  $E(\Sigma_\delta)$  soit encore fini. De cette façon tous les sommets terminaux de  $\Sigma_\delta$  sont de type surface.

Soit  $e = (v, w) \in E(\Sigma_\delta)$  une arête telle que  $d(w, v_0) \geq d(v, v_0)$  et  $w \in V(\Sigma_\delta) \cap V_1$ . Si on note  $\{e_j = (v_j, w) : j = 1, \dots, m_w\} := \Delta(w) \setminus \{e\}$ , alors

$$\partial Z(e) = \bigcup_{i=1}^{m_w} \partial Z(e_j) = \bigcup_{i=1}^{m_w} \partial Z_w(e_j). \quad (6.6.5)$$

L'intersection de deux ensembles de cette décomposition est égale à  $\Lambda_w = \Lambda_{e_j}$ ,  $j = 1, \dots, m_w$ . Cela nous permet de remplacer  $\partial Z(e)$  par la réunion des  $\partial Z(e_j)$ , dont les  $v_j$  appartiennent tous à  $V_2 \cap V(\delta)$ .

Si  $v \in V_2 \cap V(\delta)$ , comme on a vu ci-dessus, il y a exactement une seule arête dans  $e \in \Delta(v)$  telle que  $\Sigma_v(e) = -\Sigma(e)$ , elle appartient forcément à  $E(\Sigma_\delta)$ ; pour toutes les autres on a  $\Sigma_v(e) = \Sigma(e)$ . D'après le Lemme 6.30, il existe des arêtes  $\{e_1(v), \dots, e_{n_v}(v)\} \in \Delta(v)$ , telles que

$$\text{diam}_\epsilon K_i(v) \leq \delta, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n_v. \quad (6.6.6)$$

On peut supposer aussi, que les arêtes de  $E(\Sigma_\delta)$  incidentes à  $v$  appartiennent à  $\{e_1(v), \dots, e_{n_v}(v)\}$ . On note  $\{u_1, \dots, u_M\} \subset V(\Sigma_\delta)$  les sommets terminaux de  $\Sigma_\delta$ . Pour chaque  $j \in \{1, \dots, M\}$ , soit  $E(u_j)$  l'ensemble des arêtes  $\{e_1(u_j), \dots, e_{n_{u_j}}(u_j)\}$  privé de celles que vérifient  $\Sigma_{u_j}(e) = -\Sigma(e)$ . Alors  $E(u_j) \subset E(\Sigma) \setminus E(\Sigma_\delta)$ , et donc pour tout  $j \in \{1, \dots, M\}$  et toute  $e \in E(u_j)$  on a

$$\text{diam}_\epsilon \partial Z_{u_j}(e) = \text{diam}_\epsilon \partial Z(e) \leq \delta. \quad (6.6.7)$$

Alors on obtient une décomposition  $\partial Z = A \cup B$ , où

$$A := \bigcup_{v \in V_2 \cap V(\Sigma_\delta)} \bigcup_{i=1}^{n_v} K_i(v) \text{ et } B := \bigcup_{j=1}^M \bigcup_{e \in E(u_j)} \partial Z_{u_j}(e). \quad (6.6.8)$$

Soit

$$P := \bigcup_{e \in E(\Sigma_\delta)} \Lambda_e \cup \bigcup_{j=1}^M \bigcup_{e \in E(u_j)} \Lambda_e. \quad (6.6.9)$$



Les ensemble de la décomposition (6.6.8) sont fermés, connexes et de diamètre plus petit ou égal à  $\delta$ . De plus, l'intersection de deux de ces ensembles, est ou bien vide ou bien un seul point de  $P$ , et donc sa frontière topologique est contenue dans  $P$ . Cela implique que toute composante connexe de  $\partial Z \setminus P$  est contenue dans un ensemble de (6.6.8). Cela finit la démonstration.  $\square$

## 7. Quelques exemples

EXEMPLE 6.7.1. Soient  $S$  une surface hyperbolique close (compacte et sans bord) et  $\pi_1(S)$  son groupe fondamental. Considérons  $S_1$  et  $S_2$  deux copies isométriques de  $S$  et deux points  $x_1 \in S_1$  et  $x_2 \in S_2$ . On construit un complexe  $M$  en identifiant  $x_1$  à  $x_2$ . Donc, si on note  $G_i$  l'image par l'inclusion de  $\pi_1(S_i)$  dans  $G := \pi_1(M)$ ,  $G$  est isomorphe au produit libre de  $G_1$  et  $G_2$ . La dimension conforme de  $G$  est égale à 1.

EXEMPLE 6.7.2. Soient  $S$  une surface hyperbolique close (compacte et sans bord),  $\pi_1(S)$  son groupe fondamental et  $\gamma$  une géodésique fermée simple de  $S$ . Considérons  $S_1$  et  $S_2$  deux copies isométriques de  $S$ . On construit un complexe  $M$  en recollant les deux copies le long de  $\gamma$ . Donc, si on note  $G_i$  l'image par l'inclusion de  $\pi_1(S_i)$  dans  $G := \pi_1(M)$ , et  $a \in G$  l'élément qui représente  $\gamma$ , alors  $G$  est isomorphe au produit amalgamé de  $G_1$  et  $G_2$  au-dessus de  $\langle a \rangle$ . Le groupe  $G$  vérifie les hypothèses du Théorème 6.5, donc  $\partial G$  vérifie la condition BR et sa dimension conforme AR est égale à 1. Cet exemple est dû à Pansu, voir aussi [BonK05] Section 6 pour une preuve différente et pour plus de commentaires.

EXEMPLE 6.7.3. Une légère modification de cet exemple, que j'ai appris par Mackay, montre que la situation est plus complexe dans le cas général. Soient  $G_1$  et  $G_2$  comme ci-dessus. A la place de recoller le long d'une géodésique fermée simple, supposons que  $a \in \pi_1(S)$  représente une géodésique fermée  $\gamma$  qui remplit la surface  $S$ ; c'est-à-dire telle que les composantes connexes de  $S \setminus \gamma$  sont des disques ouverts. On considère le produit amalgamé  $G$  de  $G_1$  et  $G_2$  au-dessus de  $\langle a \rangle$ .

Dans ce cas, pour toute paire de points  $\{x, y\}$  dans  $S^1 = \partial \mathbb{H}^2$ , il existe un conjugué de  $a$  dans  $\pi_1(S)$ , tel que ses deux points fixes  $p$  et  $q$  dans  $S^1$  séparent  $x$  de  $y$ . En effet, l'application de revêtement  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ , est une isométrie restreinte à chaque composante connexe de  $\pi^{-1}(U)$ , où  $U$  est une composante connexe de  $S \setminus \gamma$ . Donc, la géodésique de  $\mathbb{H}^2$  qui joint  $x$  et  $y$ , doit intersecter une préimage de  $\gamma$ . Pour chaque conjugué  $g$  de  $a$  dans  $\pi_1(S)$ , on rajoute un cercle qui intersecte  $S^1$  en les deux points fixes de  $g$ . Donc  $S^1$  n'est pas déconnecté dans  $\partial G$  par une quantité finie de points. Donc  $\partial G$  ne vérifie pas BR. Le scindement JSJ de  $G$  est, dans ce cas, le

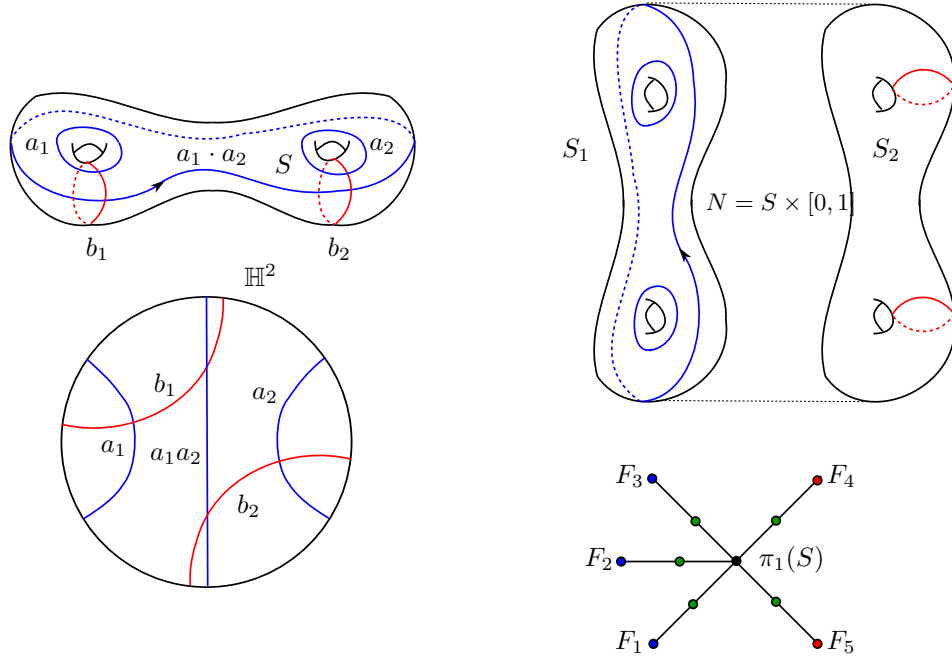


FIGURE 6.7. Description de l'exemple 6.7.4.

graphe de groupes donné par trois sommets et deux arêtes, où les stabilisateurs de deux de ces sommets sont de type rigide isomorphes à  $\pi_1(S)$ , et le troisième est de type virtuellement cyclique isomorphe à  $\langle a \rangle$ .

**EXEMPLE 6.7.4.** On peut modifier encore une fois ce dernier exemple, de sorte que  $G$  soit isomorphe à un sous-groupe discret, convexe cocompact de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$  (qui n'agit pas cocompactement sur  $\mathbb{H}^3$ ). Donc  $\partial G$  est planaire et de dimension topologique 1. Supposons sans perte de généralité que  $S$  est de genre 2 et que son groupe fondamental est présenté par  $\langle a_1, a_2, b_1, b_2 | [a_1, b_1][a_2, b_2]^{-1} \rangle$ . Soit  $\Gamma = \{a_1, a_2, a_1 \cdot a_2, b_1, b_2\}$  une multicourbe qui remplit la surface  $S$ ; c'est-à-dire, les éléments de  $\Gamma$  sont des géodésiques fermées simples, telles que les composantes connexes de  $S \setminus \Gamma$  sont des disques. Voir la figure 7.

Soient  $T_i$  pour  $i = 1, \dots, 5$  des surfaces hyperboliques à bord totalement géodésique, homéomorphes à la surface de genre 1 (le tore) moins un disque ouvert. On note  $\sigma_i$  le bord de  $T_i$ , et on suppose que  $\ell(\sigma_i) = \ell(\gamma_i)$ , où  $\gamma_1 = a_1$ ,  $\gamma_2 = a_1 a_2$ ,  $\gamma_3 = a_2$ ,  $\gamma_4 = b_1$  et  $\gamma_5 = b_2$ .

On considère le 2-complexe  $M$ , obtenu en recollant isométriquement chaque  $T_i$  à  $S$  le long de  $\sigma_i$  et  $\gamma_i$ . Soit  $G = \pi_1(M)$ , alors  $G$  agit géométriquement sur le

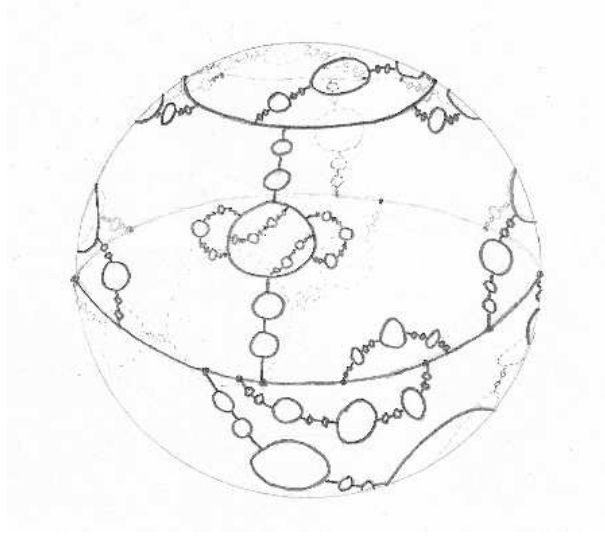


FIGURE 6.8. Ensemble limite de l'exemple 6.7.4.

revêtement universel  $\tilde{M}$ , qui est un espace  $\text{CAT}(-1)$ . Donc  $G$  est hyperbolique, et on peut identifier  $\partial G$  avec  $\partial \tilde{M}$ . Voir la figure 7.

Le scindement JSJ de  $G$  consiste justement au graphe de groupes dessiné dans la figure 7, où  $F_i = \pi_1(T_i)$  pour  $i = 1, \dots, 5$ . Ces sommets sont de type surface, et le sommet correspondant à  $\pi_1(S)$  est de type rigide. Entre chaque paire  $F_i$  et  $\pi_1(S)$  on a un sommet de type virtuellement cyclique associé à  $\gamma_i$ . Les mêmes arguments que dans l'exemple précédent, montrent que  $\partial G$  ne vérifie pas la propriété BR.

Pour voir que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe discret convexe cocompact de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$ , on «gonfle» le complexe  $M$  pour obtenir une 3-variété de la façon suivante. Soit  $N = S \times [0, 1]$ , et pour  $i = 1, \dots, 5$  soient  $B_i = T_i \times [0, 1]$  et  $R_i \simeq S^1 \times D$  (des tores solides). On considère le graphe d'espaces avec graphe sous-jacent isomorphe à celui du scindement JSJ de  $G$ , où on remplace les stabilisateurs  $\{F_i\}$  par les espaces  $\{B_i\}$ , les  $\{\langle \gamma_i \rangle\}$  par les  $\{R_i\}$ , et  $\pi_1(S)$  par  $N$ . Les espaces associés aux arêtes sont tous des anneaux  $S^1 \times [0, 1]$ .

On note  $S_1 = S \times \{0\}$  et  $S_2 = S \times \{1\}$  les deux composantes du bord de  $N$ . On suppose que dans  $N$ , les  $a_1, a_1 a_2, a_3$  sont contenues dans  $S_1$  et les  $b_1, b_2$  sont contenues dans  $S_2$ . Pour chacune de ces courbes, on considère des petits voisinages, homéomorphes à des anneaux, contenues respectivement dans  $S_1$  et  $S_2$ . Aussi pour chaque tore solide  $R_i$  on considère deux anneaux de la forme  $S^1 \times J_k$ , où  $J_k$  sont, pour  $k = 1, 2$ , des intervalles contenus dans  $\partial D$ . Finalement les applications de recollement sont des homéomorphismes qui identifient ces anneaux.

Si on note  $X$  l'espace associé à ce graphe d'espaces, alors  $X$  est une 3-variété avec bord, qui se rétracte par déformation sur  $M$ , et donc  $G \simeq \pi_1(X)$ . D'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston,  $G$  est isomorphe à un sous-groupe discret, convexe cocompact de  $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$ . Voir [KK00] pour une construction similaire et pour plus de détails.



## CHAPITRE 7

### Applications à la dynamique des revêtements ramifiés

Dans cette partie on applique le critère 5.9 pour estimer la dimension conforme AR des ensembles limites d'une certaine classe de revêtement ramifiés, qui représente la classe analogue dans ce contexte dynamique des groupes hyperboliques. Plus précisément, dans la Proposition 7.6 et le Théorème 7.7 on donne des conditions suffisantes qui impliquent qu'un tel ensemble limite vérifie les conditions UBR et LC. On utilise un résultat de J. Kiwi [Kiwi04] pour montrer dans le Corollaire 7.12 que les polynômes semi-hyperboliques vérifient ces conditions. La structure des points de coupure locale pour ce type d'espaces est moins riche que celle des groupes hyperboliques, et cette différence dans le classique dictionnaire entre les deux théories rend plus difficile de trouver des énoncés généraux comme dans le Chapitre 6. Enfin, dans la Section 2.2, on utilise la théorie des puzzles pour montrer (Corollaire 7.17) que l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle hyperbolique est de dimension conforme AR égale à 1 dès qu'elle admet un tel objet. On remarque qu'il existe des fractions rationnelles, non polynomiales, qui admettent un puzzle (voir [Roe99]).

#### 1. Dynamique topologiquement dilatante grossièrement conforme

**1.1. Définitions préliminaires.** La définition suivante apparaît dans [HP09] Définition 2.1.1 ; elle généralise les propriétés topologiques des fractions rationnelles. Dans la suite, on notera  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  des espaces séparés localement compacts et localement connexes. On suppose toujours que  $\mathcal{X}_1$  est ouvert et relativement compact dans  $\mathcal{X}_0$ .

**DÉFINITION 7.1** (Revêtement ramifié). *Une application continue  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  à fibres finies est un revêtement ramifié de degré  $d \geq 1$  si*

- pour tout  $y \in \mathcal{X}_0$ , on a  $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg(f, x) = d$  et
- pour tout  $x_0 \in \mathcal{X}_1$ , il existe des voisinages compacts  $U$  et  $V$  de  $x_0$  et  $f(x_0)$  respectivement tels que  $\sum_{x \in U, f(x) \in V} \deg(f, x) = \deg(f, x_0)$  pour tout  $y \in V$ .

On rappelle que pour  $x \in \mathcal{X}_1$ ,  $\deg(f, x)$  designe le degré local de  $f$  au point  $x$  donné par

$$\deg(f, x) = \inf_U \sup \{ |f^{-1}(z) \cap U| : z \in f(U) \},$$

où  $U$  parcourt les voisinages de  $x$ .

REMARQUES.

- Un revêtement ramifié  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  est ouvert, fermé, propre et surjectif. De plus, les lieux de branchement  $B_f := \{\deg(f, x) > 1\}$  et de ramification  $V_f := f(B_f)$  sont fermés et nulle part denses.
- Si  $V \subset \mathcal{X}_0$  est ouvert et connexe, et  $U \subset \mathcal{X}_1$  est une composante connexe de  $f^{-1}(V)$ , alors  $f|_U : U \rightarrow V$  est aussi un revêtement ramifié. En particulier, si  $y \in \mathcal{X}_0$  et  $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , alors il existe un voisinage connexe arbitrairement petit  $V$  de  $y$  tel que  $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_k$  est une réunion disjointe de voisinages connexes  $U_i$  de  $x_i$  tels que  $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  est un revêtement ramifié de degré  $\deg(f, x_i)$ .

Le *répulseur* ou l'ensemble limite de  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  est

$$X := \{x \in \mathcal{X}_1 : f^n(x) \in \mathcal{X}_1 \ \forall n > 0\}. \quad (7.1.1)$$

Par la suite, on fera toujours l'hypothèse que la restriction  $f|_X : X \rightarrow X$  est aussi un revêtement ramifié de même degré  $d$ . Cet ensemble  $X$  est compact et totalement invariant.

Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement fini de  $X$  par des ouverts connexes de  $\mathcal{X}_1$ . On construit une suite de recouvrements  $\{S_n\}_n$  en considérant les composantes connexes de  $f^{-(n-1)}(U)$ , quand  $U$  parcourt  $\mathcal{U}$ .

DÉFINITION 7.2 ([HP09] section 2.2). On dit qu'un revêtement ramifié  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  de degré  $d$  et de répulseur  $X$  est topologiquement dilatant et grossièrement conforme, abrégé en anglais par *top. CXC*, si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- **[Expansion]** : Il existe un recouvrement  $\mathcal{U}$  tel que : pour tout recouvrement fini  $\mathcal{V}$  de  $X$  par des ouverts de  $\mathcal{X}_0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$  et tout  $U \in S_n$  il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $U \subset V$ .
- **[Irréductibilité]** : Pour tout  $x \in X$  et tout voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathcal{X}_0$ , il existe un sous-voisinage  $W$  et un itéré  $n \geq 0$  tels que  $f^n(W) \supset V$ .
- **[Degré]** : L'ensemble des degrés des restrictions des itérés de  $f$  de la forme  $f^k|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ , où  $U \in S_n$ ,  $\tilde{U} \in S_{n+k}$ , avec  $n$  et  $k$  arbitraires, est majoré par un entier  $p$ .

**1.2. La jauge conforme canonique.** On peut associer une jauge conforme canonique à tout revêtement ramifié top. CXC. Cette structure quasiconforme provient de la jauge du bord à l'infini d'un espace hyperbolique.

Soit  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  un revêtement ramifié top. CXC de répulseur  $X$ . On note  $\mathcal{U}$  un recouvrement qui vérifie la condition [Expansion] donnée par la Définition 7.2. On associe un graphe  $\Gamma$  (qui dépend de  $\mathcal{U}$ ) où les sommets sont les éléments de  $\mathcal{S} := \bigcup_n S_n$ , et d'un point base abstrait  $o$  que l'on peut voir comme  $X$ . On écrit  $|W| = n$  si  $W \in S_n$ . Tous les éléments de  $S_1 = \mathcal{U}$  ont une arête les joignant à  $o$ . Les autres arêtes  $(W, W')$  sont définies par les propriétés  $||W| - |W'|| \leq 1$  et  $W \cap W' \cap X \neq \emptyset$ . On munit  $\Gamma$  de la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment  $[0, 1]$ . Alors  $f$  agit de manière simpliciale sur  $\Gamma \setminus B(o, 2)$ , et ceci définit une transformation  $F : \Gamma \setminus B(o, 2) \rightarrow \Gamma \setminus B(o, 1)$ , que l'on peut prolonger continûment à tout  $\Gamma$  en posant  $F(B(o, 1)) = \{o\}$ .

**THÉORÈME 7.3** (Géométrisation, [HP09] Thm 3.2.1 et 3.3.1). *Le graphe  $\Gamma$  est géodésique, propre, non borné, hyperbolique au sens de Gromov et vérifie les propriétés suivantes.*

- *L'application  $F$  admet une unique extension continue  $F : \partial\Gamma \rightarrow \partial\Gamma$  au bord ; muni d'une métrique visuelle de paramètre  $\epsilon > 0$  vue de  $o$ , on a pour tout  $x \in \partial\Gamma$  et tout  $r > 0$  assez petit,  $F(B(x, r)) = B(F(x), re^\epsilon)$ .*
- *Il existe un homéomorphisme canonique  $\phi : X \rightarrow \partial\Gamma$  tel que  $\phi \circ f = F \circ \phi$ .*
- *Si  $\mathcal{V}$  est un autre recouvrement qui vérifie [Expansion], alors le graphe  $\Gamma'$  associé à  $\mathcal{V}$  et le graphe  $\Gamma$  sont quasi-isométriques.*

Le graphe  $\Gamma$  joue le même rôle que le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique. La jauge conforme canonique associée à  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$ , qu'on note  $\mathcal{J}_f$ , est la jauge conforme de  $X$  qui contient les distances  $\phi^*(d_\epsilon)$ , où  $d_\epsilon$  est une métrique visuelle de  $\partial\Gamma$  donnée par le théorème précédent. On remarque que de manière analogue que dans le cas de groupes hyperboliques, les métriques visuelles  $d_\epsilon$  sont Ahlfors régulières de dimension  $\log(d)/\epsilon$  (voir [HP09] Thm 3.5.6).

L'importance de cette construction tient dans le fait suivant.

**THÉORÈME 7.4** (Thm. 3.5.3 [HP09]). *Soit  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  un revêtement ramifié top. CXC de répulseur  $X$ . Alors la jauge conforme  $\mathcal{J}_f$  dépend seulement de la classe de conjugaison topologique de  $f$ . En particulier, la dimension conforme AR de  $X$  est un invariant par conjugaison topologique.*



## 2. La propriété UBR pour les revêtements ramifiés

On suppose maintenant que  $\mathcal{X}_0$  est un espace métrique. Si  $U \subset \mathcal{X}_0$  est ouvert et  $x \in U$ , on définit la rondeur  $\text{Rond}(U, x)$  de  $U$  par rapport à  $x$  comme l'infimum du quotient  $R/r$ , où  $r \leq R$  vérifient  $B(x, r) \subset U \subset B(x, R)$ .

L'analogie de la notion de groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius est donné par les revêtements ramifiés top. CXC qui vérifient aussi les deux conditions supplémentaires suivantes (voir [HP09] section 2.5) :

- **[Rondeur]** Il existe deux fonctions  $\rho_{\pm} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissantes qui donnent le contrôle suivant sur la distorsion des rondeurs. Pour tous  $n, k \geq 1$  et pour tous  $U \in S_n$ ,  $\tilde{U} \in S_{n+k}$ ,  $\tilde{y} \in \tilde{U}$  et  $y \in U$ , si  $f^k(\tilde{U}) = U$  et  $f^k(\tilde{y}) = y$  alors  $\text{Rond}(\tilde{U}, \tilde{y}) < \rho_-(\text{Rond}(U, y))$  et  $\text{Rond}(U, y) < \rho_+(\text{Rond}(\tilde{U}, \tilde{y}))$ .
- **[Diamètre]** Il existe deux homéomorphismes croissants  $\delta_{\pm} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui donnent le contrôle suivant sur la distorsion relative des diamètres. Pour tous  $n_0, n_1, k \geq 1$  et pour tous  $U \in S_{n_0}$ ,  $U' \in S_{n_1}$ ,  $\tilde{U} \in S_{n_0+k}$ ,  $\tilde{U}' \in S_{n_1+k}$  tels que  $\tilde{U}' \subset \tilde{U}$  et  $U' \subset U$ , si  $f^k(\tilde{U}) = U$  et  $f^k(\tilde{U}') = U'$  alors

$$\delta_- \left( \frac{\text{diam} U'}{\text{diam} U} \right) < \frac{\text{diam} \tilde{U}'}{\text{diam} \tilde{U}} < \delta_+ \left( \frac{\text{diam} U'}{\text{diam} U} \right).$$

Ces deux conditions généralisent dans ce contexte le principe de l'ascenseur conforme. Si  $f$  est un revêtement ramifié top. CXC qui vérifie ces deux conditions supplémentaires, on dit que  $f$  est *dilatant et grossièrement conforme*, abrégé en anglais par CXC. D'après [HP09, Thm. 3.5.1], dans ce cas, la jauge conforme  $\mathcal{J}(X, d)$ , où  $d$  est la distance originale sur  $\mathcal{X}_0$ , est la même que la jauge conforme canonique  $\mathcal{J}_f$ .

Les domaines de  $\mathcal{S}$  remplissent correctement les voisinages des points de  $X$  : toute boule de rayon assez petit peut être coincée entre deux de ces domaines de niveaux comparables. Plus précisément, d'après la Prop. 2.6.6. de [HP09], il existe des constantes  $\delta_0$ ,  $n_0$  et  $L > 1$ , telles que pour tous  $x \in X$  et  $r \in (0, \delta_0)$  il existe  $U \in S_n$  et  $U' \in S_m$  tels que

$$B(x, r/L) \subset U \subset B(x, r) \subset U' \subset B(x, Lr), \quad (7.2.1)$$

et  $0 < n - m \leq n_0$ . Cela a comme conséquence que  $X$  est uniformément parfait et doublant (Prop. 2.6.7 et 2.6.10 de [HP09]). Elle implique aussi que si  $U \cap X$  est connexe pour tout  $U \in \mathcal{S}$ , alors l'ensemble  $X$  est linéairement connexe (LC). En particulier  $X$  est LC dès qu'il est localement connexe.

Soit  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  un revêtement ramifié CXC, et soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement qui vérifie [Expansion]. Dorénavant on suppose toujours que  $X$  est connexe et localement connexe.

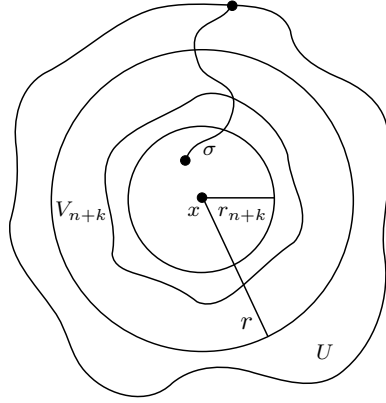


FIGURE 7.1. Démonstration du Lemme 7.5.

LEMME 7.5. *Si  $X$  vérifie la propriété BR, il vérifie aussi la propriété UBR.*

DÉMONSTRATION. Soient  $x \in X$  et  $r < \delta_0$ . D'après (7.2.1), il existe  $n$  et  $U \in S_n$  tels que  $B(x, r) \subset U \subset B(x, Lr)$ . Donc  $\text{Rond}(U, x) \leq L$ . On considère  $U' = f^{n-1}(U) \in S_1 = \mathcal{U}$  et  $x' = f^{n-1}(x)$ . D'après l'axiome de [Rondeur] on sait que  $\text{Rond}(U', x') \leq \rho_+(L)$ . Alors il existe  $r_0 > 0$  tel que  $B(x', r_0) \subset U' \subset B(x', \rho_+(L))$ . Si  $c > 0$  est le diamètre minimal des éléments de  $S_1$ , alors  $r_0 \geq \rho_+(L)^{-1} \cdot c := c'$ .

On utilise la propriété suivante ([HP09] Prop 2.6.3) : il existe une constante  $K$  et une suite  $r_m > 0$  qui tend vers zéro tels que pour tous  $x \in X$  et  $r \in (0, r_m]$ , il existe  $V \in S_m$  avec  $B(x, r) \subset V$  et  $\text{Rond}(V, x) \leq K$ . On choisit, pour  $m = n + k$  avec  $k > 0$ , un élément  $V_m \in S_m$  ainsi. Comme  $X$  est connexe, on a les estimations suivantes :

$$r \leq \text{diam}U \leq 2L \cdot r \text{ et } r_m \leq \text{diam}V_m \leq 2K \cdot r_m.$$

De plus, d'après la Prop. 2.6.5 de [HP09], il existe des constantes  $C \geq 1$  et  $\theta \in (0, 1)$  telles que  $\text{diam}V_m \leq C \cdot \theta^k \cdot \text{diam}U$ . Alors on a

$$\frac{2K \cdot r_m}{r} \lesssim \frac{\text{diam}V_m}{\text{diam}U} \lesssim \theta^k.$$

Cela implique qu'il existe  $k_0$  tel que  $V_{n+k} \subset U$  si  $k \geq k_0$ . De nouveau d'après l'axiome [Rondeur], il existe  $s_k > 0$  tel que  $B(x', s_k) \subset V'_k \subset B(x', \rho_+(K))$  où  $V'_k = f^n(V_{n+k})$ . En particulier,  $2\rho_+(K)s_k \lesssim \theta^k$ , et il existe  $k_1$  tel que pour  $k \geq k_1$  on a  $V'_k \subset B(x', c'/2)$ . On fixe  $k = \max\{k_0, k_1\}$ , et on a

$$\text{dist}(V'_k, X \setminus U') \geq c'/2 := \eta_0$$

Enfin comme  $\text{diam}V_{n+k} \geq C^{-k}\text{diam}U$  (voir Prop. 2.6.4 [HP09]), on obtient qu'il existe une constante  $\tau > 0$  telle que

$$\frac{r_{n+k}}{r} \geq \tau.$$

Soit  $\gamma$  une courbe de  $X$  telle que  $\gamma \cap B(x, \tau \cdot r) \neq \emptyset$  et  $\gamma \cap X \setminus B(x, Lr) \neq \emptyset$ . Soit  $\sigma$  la sous-courbe de  $\gamma$  qui joint  $\gamma(0)$  avec le premier point d'intersection de  $\gamma$  avec la frontière de  $U$ . Alors  $f^{n-1}(\sigma)$  est une courbe qui joint  $V'_k$  avec  $X \setminus U'$ . En particulier, on a  $\text{diam}\sigma \geq \eta_0$ .

Comme  $X$  est BR, il existe un ensemble fini  $R$  tel que  $\sigma \cap R \neq \emptyset$ . Soit  $P = f^{-(n-1)}(R) \cap U'$ , comme  $\sigma \subset \gamma$  on a  $\gamma \cap P \neq \emptyset$ . Alors  $P$  est un ensemble fini, et son cardinal est uniformément borné par une constante  $N$ , qui dépend seulement du cardinal de  $R$  (et donc de  $\eta_0$ ) et de  $p$  (le degré maximal dans la Définition 7.2). Cela montre que  $X$  vérifie UBR.  $\square$

REMARQUE. Le fait que  $X$  soit UBR dès qu'il est BR n'est pas une conséquence du Lemme 5.8, car en général la dynamique CXC n'induit pas une structure quasi-autosimilaire sur  $X$ ; la restriction de  $f$  à des petites boules de  $X$  peut être de degré plus grand que 2.

PROPOSITION 7.6. *Soit  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  un revêtement ramifié CXC et soit  $\mathcal{U}$  le recouvrement donné par la Définition 7.2. On suppose que pour tout  $U \in \mathcal{S}$  la frontière topologique de  $U \cap X$  dans  $X$  est finie. Alors  $X$  est BR (et donc UBR). En particulier, la dimension conforme AR de  $X$  est égale à 1.*

DÉMONSTRATION. On a déjà remarqué que  $X$  est LC. On montre que  $X$  est BR. En effet, comme  $\mathcal{U}$  vérifie [Expansion], étant donné  $\delta > 0$  il existe  $n \geq 1$  tel que  $\text{diam}U < \delta$  pour tout  $U \in S_n$ . Soit  $P_\delta$  la réunion de  $\partial U$  avec  $U \in S_n$ . Alors si  $V$  est une composante connexe de  $X \setminus P_\delta$ , comme  $V \cap \partial_X(U \cap X) = \emptyset$  pour tout  $U \in S_n$ , il existe un tel  $U$  avec  $V \subset U$ . Donc  $\text{diam}V < \delta$ . Cela termine la preuve.  $\square$

En générale les ensembles qui fournissent les points de coupure locale pour la propriété BR sont des points périodiques et prépériodiques. On peut formuler aussi une condition dynamique suffisante pour la propriété BR à l'aide de ces points. Cette condition a été amplement étudiée pour les polynômes ([Sch98],[Kiwi04]). Soit  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_0$  un revêtement ramifié top. CXC de répulseur localement connexe  $X$  et soit  $\mathcal{U}$  le recouvrement donné par la Définition 7.2. On pose  $P$  l'ensemble de tous les points périodiques et prépériodiques de  $f$ .  $P$  est un ensemble dénombrable ([HP09]) et d'après le Théorème 5.6 on a :

**THÉORÈME 7.7** (Fibres dynamiques triviales implique BR). *Supposons que pour tout  $x \in X$  la  $P$ -fibre de  $x$  est triviale ( $P(x) = \{x\}$ ). Alors  $X$  vérifie la propriété BR et donc  $\dim_{AR} X = 1$ .*

**2.1. Dynamique des fractions rationnelles.** On note  $\hat{\mathbb{C}}$  la sphère de Riemann. Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ . Son ensemble de Fatou est l'ensemble des points  $z$  pour lesquels il existe un voisinage  $V$  tel que la restriction des itérées  $\{f^n|_V\}$  à  $V$  est une famille normale au sens de Montel. L'ensemble de Julia  $J(f)$  est son complémentaire. Voir [BM01], [CG93] et [Mil99] pour une introduction au sujet.

On rappelle que  $z$  est un point critique de  $f$  si  $f'(z) = 0$ . L'ensemble postcritique de  $f$  est

$$P(f) := \overline{\bigcup_{z:f'(z)=0} \bigcup_{n \geq 1} f^n(z)}.$$

L'orbite de  $z$  est un cycle attractif (parabolique), si  $z$  est périodique et son multiplicateur  $(f^n)'(z)$  est de module strictement plus petit que 1 (une racine de l'unité). On dit qu'un point  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  est récurrent s'il appartient à son ensemble  $\omega$ -limite défini par

$$\omega(z) := \left\{ x \in \hat{\mathbb{C}} : \exists n_k \rightarrow \infty \text{ tel que } x = \lim_k f^{n_k}(z) \right\}.$$

La classe des fractions rationnelles semi-hyperboliques a été introduite par L. Carleson, P. Jones et J.-C. Yoccoz dans [CJY94]. Une des caractérisations possibles de cette classe est la suivante.

**DÉFINITION 7.8.** *Une fraction rationnelle  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est semi-hyperbolique si  $f$  n'a pas de point critique récurrent ni de cycle parabolique.*

La classification des domaines de stabilité (voir [Mil99] Chap. 16) implique que l'ensemble de Fatou de  $f$  consiste des points qui convergent par itération vers des cycles attractifs. Dans ce cas, on peut considérer un petit voisinage de ces cycles attractifs et prendre comme  $\mathcal{X}_0$  son complémentaire et  $\mathcal{X}_1 = f^{-1}(\mathcal{X}_0)$ .

**THÉORÈME 7.9.** (Thm. 4.2.3 [HP09]) *Une fraction rationnelle  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est CXC si et seulement si  $f$  est semi-hyperbolique. Dans ce cas, la jauge conforme canonique coïncide avec la jauge de la métrique sphérique.*

Si  $f$  est semi-hyperbolique, une conséquence du théorème de Mañé [Ma93] (voir aussi [ST]), prouvée dans [CJY94] pour les polynômes et généralisée aux fractions rationnelles dans [Yin99], est la suivante : il existe un rayon  $r_0 > 0$ , un degré maximal  $p < \infty$  et des constantes  $c > 0$  et  $\theta < 1$  tels que, pour tout  $x \in J(f)$ ,

tout itéré  $n \geq 1$  et toute composante connexe  $W_n$  de  $f^{-n}(B(x, r_0))$ , le degré de la restriction de  $f^n$  à  $W_n$  est au plus  $p$  et le diamètre de  $W_n$  est au plus  $c \cdot \theta^n$ . On remarque aussi que d'après les travaux de [CJY94] et [Yin99], l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle semi-hyperbolique est localement connexe dès qu'il est connexe. Ainsi d'après (7.2.1),  $J(f)$  est LC. On peut reformuler la Proposition 7.6 dans ce contexte :

**COROLLAIRE 7.10.** *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle semi-hyperbolique de degré  $d \geq 2$ . S'il existe un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $J(f)$  tel que pour tout  $U \in \mathcal{U}$  on a*

$$(1) \ U \subset B(x, r_0) \text{ avec } x \in J(f),$$

$$(2) \ \partial U \cap J(f) \text{ est fini,}$$

*alors  $J(f)$  est UBR et donc en particulier  $\dim_{AR} J(f) = 1$ . En particulier, ceci est le cas si toutes les fibres des points de  $J(f)$  sont triviales.*

On remarque que la première condition sur  $\mathcal{U}$  garantit que  $\mathcal{U}$  vérifie la condition [Expansion]. Pour les polynômes les hypothèses du Corollaire 7.10 sont toujours vérifiées. Plus précisément on a :

**THÉORÈME 7.11** (Voir [Kiw04] Theorem 5.12). *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  un polynôme de degré  $d \geq 2$ . Supposons que  $f$  n'a pas de cycle neutre et que  $J(f)$  est connexe et localement connexe. Si (avec les mêmes notations que ci-dessus)  $P$  désigne l'ensemble de tous les points périodiques ou prépériodiques de  $f$  dans  $J(f)$ , alors pour tout point  $x$  de  $J(f)$  on a  $P(x) = \{x\}$ .*

Alors d'après le Théorème 7.7 on obtient le résultat suivant.

**COROLLAIRE 7.12.** *Si  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est un polynôme semi-hyperbolique de degré  $d \geq 2$ , et  $J(f)$  est connexe, alors  $J(f)$  vérifie la propriété BR. En particulier  $\dim_{AR} J(f) = 1$ .*

**2.2. Le cas de fractions rationnelles hyperboliques.** Dans cette partie on donne une condition qui implique les hypothèses du Corollaire 7.10 pour les fractions rationnelles hyperboliques. On rappelle que  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est hyperbolique si tout point critique de  $f$  converge par itération vers un cycle attractif ; de manière équivalente,  $f$  est semi-hyperbolique et sans point critique dans  $J(f)$ . On remarque que dans ce cas, l'ensemble de Julia de  $f$  est quasi-autosimilaire. Ceci est une conséquence du théorème de distorsion de Koebe et du fait que la dynamique est univalente proche de  $J(f)$  (voir aussi [BM01] Corollaire Théorème VI.24).

LEMME 7.13. *Soit  $W$  un ouvert connexe et simplement connexe de  $\hat{\mathbb{C}}$  tel que  $\text{dist}(W, P(f)) \geq \delta > 0$ . Alors il existe deux constantes  $c > 0$  et  $\theta \in (0, 1)$  qui dépendent seulement de  $\delta$ , tels que pour toute composante connexe  $W_n$  de  $f^{-n}(W)$ , la restriction  $f^n : W_n \rightarrow W$  est un homéomorphisme et le diamètre de  $W_n$  est au plus  $c \cdot \theta^n$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $P(f)$  est  $f$ -invariant, il existe un petit voisinage  $V$   $f$ -invariant de  $P(f)$ , avec  $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$  connexe, et un compact  $K \subset V$ , tels que tout domaine  $W$  qui vérifie l'hypothèse du lemme est contenu dans  $K$ . On considère  $\rho$  la métrique hyperbolique dans  $\hat{\mathbb{C}} \setminus V$ . Il existe une constante  $\theta = \theta(K) \in (0, 1)$  telle que si  $g$  est une branche inverse de  $f$  définie sur un domaine  $W$  contenu dans  $K$ , alors

$$\max \{ \|g'(z)\|_\rho : z \in W \} \leq \theta. \quad (7.2.2)$$

Si  $W$  est un domaine simplement connexe qui vérifie l'hypothèse du lemme, alors  $f^n : W_n \rightarrow W$  est un homéomorphisme pour toute composante connexe  $W_n$  de  $f^{-n}(W)$ . Pour tout  $n$  on a  $W_n \subset V$ , et d'après (7.2.2)

$$\text{diam}_\rho W_n \leq \theta^n \cdot \text{diam}_\rho K.$$

Enfin il suffit de comparer la métrique sphérique avec  $\rho$  pour finir la preuve du lemme.  $\square$

Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle hyperbolique et  $A(f)$  la réunion des orbites (positives) de tous ses cycles attractifs. Soit  $V_0$  un voisinage ouvert de  $A(f)$ , dont le bord est formé par des courbes de Jordan qui ne contiennent pas les points critiques de  $f$ , et tel que l'image  $f(V_0)$  est relativement compacte dans  $V_0$ . Tous les ouverts  $V_n = f^{-n}(V_0)$  vérifient les mêmes propriétés que  $V_0$ . De plus, pour  $n$  assez grand  $V_n$  contient tous les points critiques de  $f$ . On fixe  $n$  suffisamment grand avec cette propriété et on pose  $\Gamma_0 := \partial V_n$  et  $K = \hat{\mathbb{C}} \setminus V_n$ . On remarque que  $P(f) \cap K = \emptyset$ . La définition suivante apparaît dans [Roe99] Définition 1.6 :

DÉFINITION 7.14 (Graphe et puzzle). *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle. On dit que  $f$  admet un puzzle s'il existe un graphe  $\Gamma$  plongé dans  $\hat{\mathbb{C}}$  qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $\Gamma$  est connexe, fini contenu dans  $K$  et  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ .
- $\Gamma$  est stable :  $f^{-1}(\Gamma) \supset \Gamma \cap f^{-1}(K)$ .
- $\Gamma \cap J(f)$  est un ensemble fini.

*On appelle pièce de profondeur  $n$  toute composante connexe de l'ouvert  $f^{-n}(K \setminus \Gamma) = f^{-n}(K) \setminus f^{-n}(\Gamma)$ . Le puzzle associé à  $(f, \Gamma)$  est la collection de toutes ces pièces.*

On remarque que la troisième condition dans la définition est automatique dès que  $f : \Gamma \cap J(f) \rightarrow \Gamma \cap J(f)$  est un homéomorphisme. Le bord des pièces de profondeur 0 est contenu dans  $\Gamma$ . Pour  $n > 0$  le bord des pièces de profondeur  $n$  est contenu dans le graphe  $\Gamma_n := f^{-n}(\Gamma)$ . Le puzzle vérifie les propriétés suivantes :

LEMME 7.15 ([Roe99] Lemme 1.8). *Toutes les pièces du puzzle sont simplement connexes. Soit  $P$  une pièce de profondeur  $n + 1$  du puzzle associé à  $(f, \Gamma)$ . Alors*

- *$P$  est incluse dans une unique pièce de profondeur  $n$ .*
- *$f(P)$  est une pièce de profondeur  $n$  et  $f : P \rightarrow f(P)$  est un homéomorphisme.*

On obtient comme corollaire de 7.10 le théorème suivant.

THÉORÈME 7.16. *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle hyperbolique telle que  $J(f)$  est connexe. Si  $f$  admet un puzzle, alors  $J(f)$  est BR, et en particulier  $\dim_{AR} J(f) = 1$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\Gamma$  le graphe de la Définition 7.14. Comme  $\Gamma \cap J(f)$  est fini, aussi  $\Gamma_n \cap J(f)$  est fini pour tout  $n$ . Donc si  $P$  est une pièce du puzzle, alors  $\partial P \cap J(f)$  est fini. Soit  $\delta = \text{dist}(K, P(f)) > 0$  et soient  $c > 0$  et  $\theta \in (0, 1)$  les constantes données par le Lemme 7.13. Comme toute pièce  $Q$  de profondeur  $n$  est une composante de  $f^{-n}(P)$  où  $P$  est une pièce de profondeur 0, et  $P$  est simplement connexe contenue dans  $K$ , d'après le Lemme 7.13 on a

$$d_n := \max \{ \text{diam} Q : Q \text{ est une pièce de profondeur } n \} \leq c \cdot \theta^n.$$

On choisit  $n$  de sorte que  $d_n \leq r_0/2$  où  $r_0$  est donné par le Corollaire 7.10. Soit  $R := \Gamma_n \cap J(f)$ ; alors  $R$  est un ensemble fini. Pour chaque point  $x \in R$  on pose  $U_x$  égale à l'intérieur de la réunion des fermetures de toutes les pièces de profondeur  $n$  qui contiennent  $x$  dans son bord. Alors  $\{U_x : x \in R\}$  est un recouvrement ouvert de  $J(f)$  qui vérifie les hypothèses du Corollaire 7.10. Cela termine la preuve.  $\square$

REMARQUE 1. Les fibres sont apparues comme des généralisations des puzzles. Soit  $\Gamma$  un puzzle et notons  $P = \bigcup_{n \geq 0} (\Gamma_n \cap J(f))$ . Pour chaque  $x \in J(f)$ , on note  $P_n(x)$  la réunion des pièces de profondeur  $n$  qui contiennent  $x$  dans leur clôture. Alors, le diamètre de  $P_n(x)$  tend vers zéro si et seulement si la  $P$ -fibre de  $x$  est triviale.

REMARQUE 2. Le théorème est aussi vrai pour les fractions rationnelles semi-hyperboliques qui admettent un puzzle de taille suffisamment petite. En effet, la démonstration est analogue à celle de ci-dessus, dès qu'on démarre avec des pièces du puzzle de diamètre plus petit que  $r_0/2$ , car dans ce cas la propriété de contraction exponentielle du diamètre est aussi vraie.

*Les puzzles pour les polynômes.* Le Corollaire 7.12 est aussi vrai pour les polynômes hyperboliques. Cependant, on trouve instructif de montrer la construction du puzzle pour les polynômes hyperboliques. On finit cette partie en montrant que si  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est un polynôme hyperbolique de Julia connexe alors  $f$  admet un puzzle au sens de la Définition 7.14. D'après un théorème de McMullen,  $f$  est quasiconformément conjugué, dans un voisinage des ensembles de Julia, à un polynôme hyperbolique postcritiquement fini (PCF). Donc on peut se restreindre à ce cas.

On doit rappeler quelques définitions. Dans le cas des polynômes, le point à l'infini  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  est un point fixe superattractif. Le complémentaire de son bassin d'attraction est l'ensemble de Julia rempli  $K(f)$  (qui est complètement invariant) et  $J(f) = \partial K(f)$ . Toutes les autres composantes connexes de l'ensemble de Fatou sont aussi simplement connexes et bornées. Dans le cas PCF, chaque composante  $U$  du Fatou peut être uniformisée par une application conforme  $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{D}$ , de sorte qu'en ces coordonnées locales  $f$  est de la forme  $z \mapsto z^k$  pour un certain  $k \geq 1$ . Si  $U$  est périodique alors  $k \geq 2$ , et ces composantes connexes sont en correspondance avec les cycles superattractifs. Il est possible que d'autres composantes aient un point critique, c'est justement le cas quand  $k \geq 2$ . Aussi pour chaque  $U$  il y a un unique point  $z_U = \phi_U^{-1}(0)$  qui est une préimage d'un point critique. Le bord  $\partial U$  d'une composante connexe est localement connexe, et donc  $\phi_U$  s'étend continûment à  $\overline{U}$ .

Soit  $U$  une composante connexe de l'ensemble de Fatou, et soit  $\phi_U : \overline{U} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  l'application uniformisante. Si  $e^{2\pi it} \in S^1$ , on appelle rayon d'angle  $t$  à

$$R_U(t) := \{ \phi_U^{-1}(re^{2\pi it}) : r \in [0, 1] \}.$$

Si  $U$  est le bassin de l'infini on appelle  $R_U(t)$  un rayon externe, sinon on l'appelle un rayon interne. On remarque que  $\phi_U^{-1}(S^1) = \partial U \subset J(f)$ . Une équipotentielle dans  $U$  est la préimage par  $\phi_U$  du bord d'un disque  $D(x, r)$  avec  $r < 1$ .

La construction qui suit (valable dans un contexte plus général) est dû à A. Poirier et J. Kiwi, on se réfère à [Kiw04] et [Poi09] pour plus de détails. Supposons maintenant que  $U$  est périodique. On dit qu'un point périodique  $x_0 \in \partial U$  supporte  $U$  si sa période est au plus la période de  $U$  et  $x_0$  est un point de coupure de  $J(f)$  (i.e.  $J(f) \setminus \{x_0\}$  a au moins deux composantes connexes, ceci est équivalent à l'existence d'au moins deux rayons externes qui aboutissent sur  $x_0$ ). Soit  $S$  l'ensemble des points de  $J(f)$  qui supportent une composante périodique bornée. Si  $J(f)$  n'est pas homéomorphe au cercle  $S^1$ , alors  $S$  est non vide et fini.



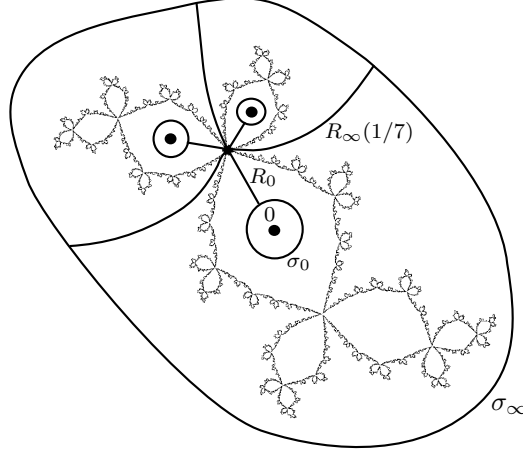


FIGURE 7.2. L'ensemble de Julia de  $z^2 + c$  où  $c \simeq -0.123 + 0.745i$  le «lapin de Douady». La figure montre un ébauche du graphe  $\Gamma$ .

Soit  $\ell \geq 0$  suffisamment grand de sorte que  $f^\ell(V)$  soit périodique pour toute composante  $V$  qui contient un point critique. On considère  $S_0 := f^{-\ell}(S)$ . On construit le graphe  $\Gamma$  comme étant la réunion de :

- $S_0$  (qui sont inclus dans les sommets de  $\Gamma$ ),
- une équipotentielle  $\sigma_V$  pour chaque composante connexe  $V$  qui ont un point critique ; on note  $D_V$  le disque déterminé par  $\sigma_V$  qui contient le point critique,
- les rayons externes qui aboutissent sur  $S_0$  intersectés avec  $\hat{\mathbb{C}} \setminus D_\infty$ ,
- les rayons internes qui aboutissent sur  $S_0$  des composantes connexes  $V$  qui ont un point critique intersectés avec  $\hat{\mathbb{C}} \setminus D_V$ .

Cela montre qu'un polynôme PCF et hyperbolique admet un puzzle. Par conséquent, d'après le Théorème 7.16 on obtient :

**COROLLAIRE 7.17.** *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  un polynôme hyperbolique et supposons que  $J(f)$  est connexe. Alors  $J(f)$  est BR et en particulier la dimension conforme AR de  $J(f)$  est égale à 1.*

**EXEMPLE.** On montre dans un exemple comment construire le puzzle. Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  le polynôme quadratique  $f(z) = z^2 + c$  avec  $c \simeq -0.123 + 0.745i$ . L'ensemble de Julia de  $f$  est connu comme le «lapin de Douady». Le point critique 0 est périodique de période 3, et forme donc le seul cycle (super)attractif de  $f$  dans  $\mathbb{C}$ . Soient  $U_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , les composantes connexes de l'ensemble de Fatou qui contiennent  $f^i(0)$  respectivement. Toute composante connexe de l'ensemble de Fatou est une préimage d'une des  $U_i$ . L'application  $f : U_0 \rightarrow U_1$  est de degré 2, et  $f$  restreinte aux autres composantes est un homéomorphisme. Les clôtures de ces trois composantes s'intersectent dans un seul point  $\alpha \in \mathbb{C}$  qui est un point fixe de  $f$ . On note  $U_\infty$  le bassin

de l'infini. Alors il existe trois rayons externes  $R_\infty(1/7)$ ,  $R_\infty(2/7)$  et  $R_\infty(4/7)$  qui aboutissent sur  $\alpha$ . Ces rayons déterminent trois secteurs chacun contenant une des  $U_i$ . Dans chaque  $U_i$  on considère une équipotentielle  $\sigma_i$ , un rayon interne  $R_i$  qui aboutit sur  $\alpha$ , et une équipotentielle  $\sigma_\infty$  dans  $U_\infty$ . Soit  $D_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \infty$  le disque déterminé par  $\sigma_i$  qui contient le point critique. Alors le graphe  $\Gamma$  est formé par la réunion de

- $\alpha$ , de  $(R_\infty(1/7) \cup R_\infty(2/7) \cup R_\infty(4/7)) \setminus D_\infty$ ,
- des  $R_i \setminus D_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  et des  $\sigma_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \infty$ .

Voir la figure 7.2.



## CHAPITRE 8

### Bilan et perspectives

#### 1. Sur la jauge conforme Ahlfors régulière

A l'aide de la structure hyperbolique des points de vue, dans le Chapitre 3, on a donné une description de la jauge conforme AR d'un espace métrique  $X$  uniformément parfait et doublant. Etant donnée une suite croissante  $\{S_k\}$  d'ensembles  $a^{-k}$ -séparés maximaux ( $a > 1$ ), on a adapté une construction de Bourdon et Pajot [BP03] pour construire un graphe  $G = G(a, \lambda)$  hyperbolique dont la jauge conforme de son bord coïncide avec la jauge de  $X$ . A partir d'une suite de fonctions de poids  $\rho := \{\rho_k : S_k \rightarrow (0, 1)\}_k$  qui vérifie les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) (pour un certain  $p > 0$ ), on peut changer les longueurs des arêtes de  $G(a)$  et construire des distances  $\theta_\rho$  dans  $\mathcal{J}_{AR}(X, d)$  de dimension  $p$ . Quand  $\rho$  parcourt toutes les possibilités, on obtient, à homéomorphismes bi-Lipschitz près, toute la jauge  $\mathcal{J}_{AR}(X, d)$ .

Cette caractérisation est suffisamment souple pour nous permettre de calculer dans le Chapitre 4, à l'aide du module combinatoire, la dimension conforme de  $\mathcal{J}_{AR}(X, d)$ . On signale que le résultat est vrai quelle que soit la topologie de  $X$  dès que  $\mathcal{J}_{AR}(X, d)$  est non vide. Cela confirme que la combinatoire du graphe  $G$  contient toute l'information sur la jauge conforme AR de  $X$ .

Par définition, pour  $p$  strictement plus grand que l'exposant critique  $Q_N$ , le module combinatoire  $M_{p,k}$  tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini. Ceci implique qu'on peut choisir  $a = 10^k$  suffisamment grand, qui dépend de la différence  $p - Q_N$ , de sorte que les hypothèses de la Proposition 3.14 (simplification des hypothèses) soient vérifiées, et par conséquent, qu'une suite de poids  $\rho$  qui vérifie les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) existe pour l'exposant  $p$ .

On signale trois aspects importants de l'égalité

$$Q_N = \dim_{AR} X. \tag{8.1.1}$$

Premièrement, la définition qu'on a donné de  $\dim_{AR} X$  est celle de [BP03], qui est mieux adaptée pour les questions de nature analytique, comme par exemple pour établir l'existence de familles de courbes de module positif [Tys98, KL04]; on remarque l'importance de ce fait dans la démonstration du théorème de Bonk

et Kleiner [BonK05]. Par contre, la définition originale donnée dans [Pan89] est plus proche de celle de l'exposant critique  $Q_N$ . Par exemple, si  $Z$  est un espace hyperbolique géodésique et propre, la suite  $\beta_n := \{\mathcal{U}(x, R), x \in Z \setminus B_n\}$  (où  $B_n$  est la boule de rayon  $n$  centrée en un point base  $o \in Z$ , et  $\mathcal{U}(x, R)$  est l'ombre de la boule  $B(x, R)$  projetée du point  $o$ ) définit une *structure quasiconforme* sur  $\partial Z$  au sens de Pansu. A une telle structure quasiconforme, Pansu associe un *p-module grossier*, et il définit la dimension conforme comme l'infimum des  $p > 1$  tels que le *p-module grossier* de toutes les parties connexes non réduites à un point soit nul. La première différence avec l'exposant critique  $Q_N$  réside dans la nature discrète de ce dernier. Mais aussi dans le fait que  $Q_N$  est calculé seulement à partir des courbes horizontales de  $G$ . On signale que cette approche, construction de distances Ahlfors régulières à partir du module combinatoire, avait déjà été considérée par J. Cannon dans [Can94]. Du point de vue théorique, l'égalité (8.1.1) montre que ces approches sont en fait équivalentes.

On remarque que la considération du graphe  $G$  permet aussi de mieux comprendre la différence entre les exposants critiques  $Q_N$  et  $Q_X$ , ce dernier étant défini à partir de vraies courbes de  $X$ . Leur égalité est fondamentale car elle relie les deux définitions de dimension conforme (comme exposant critique des modules de courbes de l'espace et comme infimum des dimensions de Hausdorff dans la jauge); ce résultat était connu de Keith et Kleiner depuis quelques temps lorsque  $X$  est connexe et quasi-autosimilaire. Cette égalité entre les exposants critiques  $Q_N$  et  $Q_X$  est en fait assurée par les deux conditions de connexité linéaire uniforme et de séparation uniforme des composantes (cf. Théorème 4.14). Elles sont optimales comme le montrent les deux exemples du Chapitre 5. Cette condition de séparation uniforme des composantes est une quantification de la non connexité de  $X$  dans le même esprit que la condition de perfection uniforme; elle permet d'aller au-delà du cas connexe. De plus, dans le cas quasi-autosimilaire, il suffit de regarder les courbes de  $X$  de diamètre minoré. En particulier, quand seulement une quantité finie des composantes connexes de  $X$  ont un grand diamètre, l'exposant  $Q_X$  ne capte pas les petites composantes de  $X$ . Par exemple, une conséquence de cette propriété est le Théorème 6.2 de stabilité de la dimension conforme AR par les scindements au-dessus de groupes finis, qui représente le premier pas dans la recherche des groupes hyperboliques de dimension conforme AR un.

Deuxièmement, (8.1.1) permet de calculer la dimension conforme AR, comme on a fait dans le Chapitre 5, quand la combinatoire de la suite  $\{S_k\}$  n'est pas trop compliquée. On peut espérer que ce soit le cas en général quand l'espace  $X$  présente

de bonnes propriétés de symétrie, comme par exemple le tapis de Sierpiński. Aussi, la nature discrète de  $Q_N$  pourrait donner, par exemple pour le tapis, une estimation numérique de la dimension conforme AR.

Troisièmement, l'égalité (8.1.1) permet de clarifier les causes de l'existence de familles de courbes de module positif quand la dimension conforme AR est atteinte : ceci est une conséquence de l'inégalité sous-multiplicative du module combinatoire et du fait que ce dernier est majoré par le module analytique des espaces tangents.

Notre description de la jauge ne suffit malheureusement pas à caractériser les jauges pour lesquelles la dimension conforme AR est atteinte. Ceci s'explique par une distorsion intrinsèque dans le passage du bord du graphe  $G(a, \lambda)$  à  $X$ . En effet, la distorsion tend vers l'infini quand  $a$  tend vers l'infini. Si une telle distance existe, le module combinatoire  $M_{Q_N, k}$  est uniformément borné. Quand  $Q_N > 1$  ceci implique qu'il existe une fonction positive  $\phi(t)$ , qui tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini, telle que pour tout condensateur  $(E, F)$  de  $X$ , on a

$$\text{Mod}_{Q_N}(E, F; G_k) \leq \phi(\Delta(E, F)),$$

pour  $k$  suffisamment grand. Par exemple  $M_{Q_N, k}(L) \leq \phi(L)$  pour tout  $L \geq 2$ . Cela motive la question suivante :

QUESTION 1 : supposons  $Q_N > 1$ . Est-il vrai que si la suite  $\{M_{Q_N, k}\}_k$  est bornée alors la dimension conforme AR de  $X$  est atteinte ?

On remarque que dans le cas  $Q_N = 1$ , la réponse est négative, car si  $X$  vérifie UBR alors le module est toujours borné, mais il n'existe pas forcément une distance de dimension minimale. Quand la suite  $\{M_{Q_N, k}\}$  est bornée, les fonctions de poids  $\rho_k$  optimales vérifient  $\|\rho_k\|_\infty \rightarrow 0$  quand  $k$  tend vers l'infini. Pour  $p > Q_N$ , on pourrait utiliser les fonctions  $\rho_k$  pour majorer  $M_{p, k}$ . Le problème est que quand  $p - Q_N$  est petit, le paramètre  $a = 10^k$  doit être choisi d'autant plus grand, et comme la distorsion dépend de  $a$ , on ne peut pas passer à la limite. Une autre approche possible serait de choisir le rapport  $L$  des «anneaux» dans la définition de  $M_{Q_N, k}(L)$  suffisamment grand, mais dans ce cas on perd le contrôle sur la combinatoire du graphe  $G(a, \lambda)$ , car on devrait aussi choisir le paramètre  $\lambda$  grand. Enfin, on peut espérer que quand  $X$  est riche en symétries, comme par exemple le tapis de Sierpiński, il soit possible de contrôler les paramètres pour pouvoir passer à la limite. On remarque que quand

$X$  vérifie la condition de Loewner combinatoire — comme le tapis — alors la suite  $\{M_{Q_N,k}\}$  est automatiquement bornée (voir [BouK10]).

## 2. Dimension conforme égale à un

Une des motivations de cette thèse a été de déterminer sous quelles conditions on a  $\dim_{AR} X = \dim_T X = 1$ . Le critère de dimension conforme 1 donné par le Théorème 5.9, c'est-à-dire la condition UBR, avec le critère de J. Mackay [Mac10] de dimension conforme strictement plus grande que 1, donnent une vision conceptuelle assez claire sur cette question et sa relation avec les points de coupure locale.

On obtient le deux cas extrêmes : si  $X$

- n'a pas de point de coupure locale quantitativement, alors  $\dim_{AR} X > 1$ .
- a des points de coupure locale uniformément bien répartis alors  $\dim_{AR} X = 1$ .

Des situations intermédiaires apparaissent aussi dans la pratique. Les exemples 6.7.3 et 6.7.4 du Chapitre 6 montrent que ceci est le cas pour les groupes hyperboliques : ils ne vérifient pas la condition UBR mais il existe un ensemble dénombrable de points de coupure locale tel que toute courbe non constante doit passer par cet ensemble. Dans le langage des fibres, les points qui sont dans l'ensemble limite d'un sommet de type rigide du scindement JSJ ( $S^1$  dans les exemples 6.7.3 et 6.7.4) ont une  $P$ -fibre non triviale, où  $P$  désigne la réunion des ensembles limites des arêtes de l'arbre JSJ. Ceci motive la question suivante, qui représente l'obstacle majeur dans la recherche des groupes de dimension conforme AR égale à un :

QUESTION 2 : Est-il vrai que si  $G$  est un groupe hyperbolique à un bout non élémentaire qui n'est pas fuchsien cocompact, tel que dans son scindement JSJ admet un sommet de type rigide, alors  $\dim_{AR} G > 1$  ?

La réponse à cette question n'est pas claire. Considérons l'exemple 6.7.4, il s'agit d'un groupe kleinéen  $G$  convexe cocompact d'ensemble limite connexe. Soit  $M$  la 3-variété hyperbolique  $\mathbb{H}^3/G$ . Dans [CMT99], les auteurs considèrent l'espace  $TT(M)$  de toutes les 3-variétés hyperboliques complètes  $N$  homéomorphes à  $M$ . Chaque  $N$  est isométrique au quotient de  $\mathbb{H}^3$  par un sous-groupe d'isométries  $G_N$ . On note aussi  $d(N)$  la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de  $G_N$ , et soit

$$D(M) = \inf\{d(N) : N \in TT(M)\}.$$

D'après le Théorème II de [CMT99], on a  $D(M) > 1$ . C'est-à-dire, si on se restreint à l'espace des déformations hyperboliques, l'infimum des dimensions de Hausdorff est strictement plus grand que 1. Par contre, le fait qu'il existe une quantité dénombrable de points par lesquels toute courbe non constante doit passer rend difficile l'application des critères existants pour minorer la dimension conforme AR, qui est *a priori* plus petite que  $D(M)$ .

Dans [CMT99], les auteurs caractérisent complètement les 3-variétés hyperboliques pour lesquelles  $D(M) = 1$  par des méthodes de 3-variétés : ce sont celles pour lesquelles leur groupe fondamental n'a pas de sommet rigide dans la décomposition JSJ de Bowditch ; en particulier, ces travaux montrent que leur dimension conforme AR vaut un, ce que nous retrouvons en utilisant la propriété BR. Les Théorèmes 6.2 et 6.5 et la Question 2 représentent les analogues de ces résultats. On se demande en général :

QUESTION 3 : Soit  $G$  un groupe kleinéen convexe cocompact et  $M = \mathbb{H}^3/G$ . Est-il vrai que  $\dim_{AR} G = D(M)$  ?

Il faut remarquer qu'en cas d'égalité entre  $D(M)$  et  $\dim_{AR} G$ , d'après le Théorème 1.4 de [BonK05], si l'infimum  $D(M)$  est atteint pour une variété  $N$ , alors  $d(N) = k \in \mathbb{N}$  est un entier et  $G$  stabilise un sous-espace totalement géodésique de  $\mathbb{H}^3$  isométrique à  $\mathbb{H}^{k+1}$  sur lequel  $G$  agit cocompactement. D'ailleurs, il est conjecturé que si  $M$  est une 3-variété hyperbolique compacte avec bord totalement géodésique, alors  $D(M) = d(M)$ , c'est-à-dire  $M$  réalise le minimum pour  $D(M)$  (voir [CMT99] Section 7). Dans ce cas, la réponse à la Question 3 serait négative. D'un autre côté, si on considère plutôt des orbifolds  $\mathcal{O}$ , alors on devrait pouvoir construire des exemples rigides, ce qui implique automatiquement que  $D(\mathcal{O})$  est atteinte ; donc la réponse est aussi négative dans ce contexte. En revanche la réponse est affirmative lorsque  $D(M) = 1$ . De toute façon il est intéressant de déterminer les groupes pour lesquels on a l'égalité.

Le dictionnaire de Sullivan montre aussi des analogies pour la dimension conforme AR entre la théorie des groupes hyperboliques et la dynamique des fractions rationnelles. On trouve une situation similaire dans le cas des ensembles de Julia de fractions rationnelles hyperboliques : il existe des accouplements de polynômes hyperboliques tels que leur ensemble de Julia  $J$  est «presque» un tapis de Sierpiński (les composantes du complémentaire s'intersectent en un point périodique ; voir [Pil94]). Dans ce cas, il existe des fibres non triviales relatives aux points pré-périodiques de  $J$  ; de plus, la composante hyperbolique de l'espace des paramètres



qui contient une telle fraction rationnelle est conjecturellement relativement compacte ([Eps00]). Ceci impliquerait que si on se restreint aux déformations dans cette composante hyperbolique, l'infimum des dimensions de Hausdorff serait aussi strictement plus grand que 1. En parallèle à la Question 3, on se demande :

QUESTION 4 : Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle hyperbolique de degré  $d \geq 2$ . On pose  $D(f)$  l'infimum des dimensions de Hausdorff des ensembles de Julia  $J(g)$  où  $g$  appartient à la composante hyperbolique qui contient  $f$ . Est-il vrai que  $\dim_{AR} J(f) = D(f)$  ?

On signale que J. Kiwi construit une compactification des espaces de fractions rationnelles par des systèmes dynamiques opérant sur des espaces non archimédiens dans laquelle il semblerait que l'on puisse analyser la dégénérescence des ensembles de Julia [Kiw06] ; cela pourrait nous permettre d'aborder cette question.

Par contre, la diversité topologique des ensembles de Julia est plus riche que celle des groupes hyperboliques. A part l'exemple déjà mentionné d'un «presque» tapis de Sierpiński, les ensembles de Julia de fractions rationnelles hyperboliques — donc quasi-autosimilaires — peuvent avoir des points de coupure globale, être homéomorphes à des Cantor de courbes, voire même avoir des composantes qui ne sont même pas LC [PT00] (à la différence des bords des groupes hyperboliques où les composantes sont toujours uniformément LC).

Cette différence dans le dictionnaire de Sullivan rend plus difficile de donner des énoncés précis. Cependant les Théorèmes 7.7 et 7.16 donnent un critère dynamique de dimension conforme AR égale à un (pour les Julia connexes) : ceci est le cas des fractions rationnelles hyperboliques qui admettent un puzzle et plus généralement quand toutes les fibres sont triviales (comme dans le cas des polynômes semi-hyperboliques). Ceci donne de nouveaux exemples d'espaces de dimension conforme AR égale à un. Enfin, pour décrire la dimension conforme AR des ensembles des Julia hyperboliques, il faudrait répondre à la question suivante :

QUESTION 5 : Est-il vrai que s'il existe un point  $x \in J(f)$  de fibre non triviale alors  $\dim_{AR} J(f) > 1$  ?

Ceci est l'analogue de la Question 2 concernant les groupes.

### 3. Sur la notion d'autosimilitude

Le dictionnaire de Sullivan motive la définition des ensembles quasi-autosimilaires qu'on a donné dans le Chapitre 2. Elle permet de donner des énoncés généraux pour les deux théories, groupes hyperboliques et fractions rationnelles. Par exemple, les deux conditions quantitatives sur les points de coupure locale, à savoir UBR et ALC, sont conséquences de l'autosimilitude dès que leurs conditions topologiques respectives sont vérifiées : BR et la non existence de points de coupure locale.

Par contre, cette notion générale d'autosimilitude est insuffisante pour d'autres questions, notamment sur la connexité locale et la séparation des composantes. Par exemple, l'autosimilitude ne garantit pas la connexité locale de l'espace ; dans nos deux classes d'exemples, les arguments sont spécifiques : dans le cas des groupes, c'est une conséquence du fait que leur bord n'a pas de point de coupure globale ; pour les fractions rationnelles hyperboliques, cela découle non seulement de l'expansion dynamique, mais aussi de la planarité des ensembles de Julia (il n'y pas d'énoncé analogue pour les CXC). Quant à la séparation uniforme des composantes, les arguments pour les groupes se basent sur la spécificité du scindement DS ; en ce qui concerne les fractions rationnelles, presque rien n'est connu.

Les arguments qui s'appliquent aux espaces  $L$ -quasiautosimilaires n'utilisent en général pas l'aspect bi-Lipschitz (à part pour l'exposant  $Q_D$ ), ce qui a motivé la Définition 2.1. Cependant, dans les cas qui nous intéressent, les espaces quasi-autosimilaires admettent toujours des distances dans leur jauge qui les rendent  $L$ -quasi-autosimilaire. On se demande si en effet, ces deux définitions ne sont pas équivalentes :

QUESTION 6 : Soit  $(X, d)$  quasi-autosimilaire. Est-il vrai qu'il existe une distance  $d'$  sur  $X$  quasisymétrique à  $d$  telle que  $(X, d')$  est  $L$ -quasi-autosimilaire ?



## Bibliographie

- [Ah73] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants : topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.
- [BM01] F. Berteloot, V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Paris, EDP Sciences, Les Ulis, 2001.
- [BT01] C. Bishop, J. Tyson, *Conformal dimension of the antenna set*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 :3631-3636, 2001.
- [B06] M. Bonk, *Quasiconformal geometry of fractals*, Proceedings Internat. Congress Math. (Madrid, 2006), Europ. Math. Soc., Zürich, 2006, 1349-1373.
- [BHK01] M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*. Astérisque 270 (2001).
- [BonK02a] M. Bonk, B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres*, Invent. Math. 150 (2002), 127-183.
- [BonK02b] M. Bonk, B. Kleiner, *Rigidity for quasi-Möbius group actions*, J. Diff. Geom. 61 (2002), 81-106.
- [BonK05] M. Bonk, B. Kleiner, *Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary*, Geom. Topol. 9 219-246, 2005.
- [Bou95] M. Bourdon, *Au bord de certains polyèdres hyperboliques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 1, 119-141.
- [BouK10] M. Bourdon, B. Kleiner, *Combinatorial modulus, the Combinatorial Loewner Property, and Coxeter groups*, 2010.
- [BP03] M. Bourdon, H. Pajot, *Cohomologie  $\ell_p$  et espaces de Besov*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik Volume 558 (2003), 85-108.
- [Bow98a] B. Bowditch, *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Acta Math. 180 (1998), no. 2, 145-186.
- [Bow98b] B. Bowditch, *Boundaries of strongly accessible hyperbolic groups*, Geometry & Topology Monographs 1 (1998), The Epstein Birthday Schrift, paper no. 3, pages 51-97.
- [BH99] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, vol. 319 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [CMT99] R. Canary, Y. Minsky, E. Taylor, *Spectral theory, Hausdorff dimension and the topology of hyperbolic 3-manifolds*, J. Geom. Analysis 9 (1999), 18-40.

- [Can94] J. Cannon, *The combinatorial Riemann mapping theorem*, Acta Math. 173 (1994), no. 2, 155-234.
- [CG93] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [CJY94] L. Carleson, P. W. Jones, J.-C. Yoccoz, *Julia and John*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25 (1994), 1-30.
- [CJ94] A. Casson, D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Invent. Math. 118, 3 (1994), 441-456.
- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes*. No. 1441 Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Chr90] M. Christ, *A  $T(b)$  theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloq. Math. 60/61 :2 (1990), 601-628.
- [Coo93] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. Math. 159(1993), 241-270.
- [DS97] G. David, S. Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 7, 1997.
- [DP01] T. Delzant, L. Potyagailo, *Accessibilité hiérarchique des groupes de présentation finie*, Topology 40 (2001), no. 3, 617-629.
- [Dun85] M. J. Dunwoody, *The accessibility of finitely presented groups*, Invent. Math. 81, 3 (1985), 449-457.
- [Elek97] G. Elek, *The  $\ell_p$ -cohomology and the conformal dimension of hyperbolic cones*, Geom. Ded. 68 (1997), 263-279.
- [Eps00] D. Epstein, *Bounded hyperbolic components of quadratic rational maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems 20 (2000), no. 3, 727-748.
- [Fal03] K. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, 2003.
- [Gab92] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Ann. of Math. (2) 136, 3 (1992), 447-510.
- [GH90] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1990.
- [Hei01] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Haïss08] P. Haïssinsky, *Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités, d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...* Séminaire Bourbaki 60, 2007/08, n 993
- [Haïss09] P. Haïssinsky, *Empilements de cercles et modules combinatoires*, Ann. Inst. Fourier 59 (2009), no. 6, 2175-2222.
- [HP08] P. Haïssinsky, K. Pilgrim, *Thurston obstructions and Ahlfors regular conformal dimension*. J. Math. Pures Appl. (9) 90, 3 (2008), 229-241.
- [HP09] P. Haïssinsky, K. Pilgrim, *Coarse Expanding Conformal Dynamics*. Astérisque 325 2009.

- [HP10] P. Haïssinsky, K. Pilgrim, *Quasisymmetrically inequivalent hyperbolic Julia sets*, 2010.
- [HP11] P. Haïssinsky, K. Pilgrim, *Minimal Ahlfors regular conformal dimension of coarse conformal dynamics on the sphere*, 2011.
- [KK00] M. Kapovich, B. Kleiner, *Hyperbolic groups with low-dimensional boundary*, Ann. Sci. de ENS Paris, t. 33 (2000) p. 647-669.
- [KL04] S. Keith, T. Laakso, *Conformal Assouad dimension and modulus*. Geom. Funct. Anal. 14, 6 (2004), 1278-1321.
- [Kiwi04] J. Kiwi, *Real laminations and the topological dynamics of complex polynomials*, Adv. Math. 184 (2004), no. 2, 207-267.
- [Kiwi06] J. Kiwi, *Puiseux series polynomial dynamics and iteration of complex cubic polynomials*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 5, 1337-1404.
- [Kle06] B. Kleiner, *The asymptotic geometry of negatively curved spaces : uniformization, geometrization, and rigidity*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, pp. 743-768, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [Kov06] L. Kovalev, *Conformal dimension does not assume values between zero and one*. Duke Math. J. 134, 1 (2006), 1-13.
- [LP04] G. Lupo-Krebs, H. Pajot, *Dimensions conformes, espaces Gromov-hyperboliques et ensembles autosimilaires*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), 153-182.
- [Mac10] J. Mackay, *Spaces with conformal dimension greater than one*, Duke Math. J. Volume 153, Number 2 (2010), 211-227.
- [MT10] J. Mackay, J. Tyson, *Conformal dimension : theory and application*, University Lecture Series, AMS 2010.
- [Ma93] R. Mañé, *On a lemma of Fatou*, Bol. Soc. Bras. Mat. 24 (1993), 1-12.
- [Mil99] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. Introductory lectures.
- [Mos73] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973. Annals of Mathematics Studies, No. 78.
- [Pan89] P. Pansu, *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 14 (1989), 177-212.
- [Pau96] F. Paulin, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord*, J. London Math. Soc. (2) 54 (1996), no. 1, 50-74.
- [Pil94] K. Pilgrim, *Cylinders for iterated rational maps*, PhD. Thesis UC Berkeley, 1994.
- [PT00] K. Pilgrim, T. Lei, *Rational maps with disconnected Julia set*, Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995). Astérisque No. 261 (2000), xiv, 349-384.
- [Poi09] A. Poirier, *Critical portraits for postcritically finite polynomials*, Fund. Math. 203 (2009), 107-163.
- [Roe99] P. Roesch, *Puzzles de Yoccoz pour les applications à allure rationnelle*, L'Enseignement Mathématique, tome 45, pp 133-168, (1999).

- [Sch98] D. Schleicher, *On fibers and local connectivity of compact sets*, Stony Brook IMS preprint 1998/12.
- [S01] S. Semmes, *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*, Appendix B 401-519 de M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces* Birkhauser 2001.
- [ST] M. Shishikura, Tan L., *An alternative proof of Mañé's theorem on non-expanding Julia sets*, dans *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, LMS Lecture Note Series 274, Cambridge Univ. Press, 2000. pp. 265-279.
- [Sho90] H. Short, *Quasiconvexity and a theorem of Howson's*, dans *Group Theory from a Geometrical Viewpoint* (Trieste, 1990), pp. 168-176. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [Sta68] J. R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends*, *Ann. of Math.* (2) 88 (1968), 312-334.
- [Sul82] D. Sullivan, *Seminar on hyperbolic geometry and conformal dynamical systems*, Preprint IHES, 1982.
- [Tu88] P. Tukia, *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, *J. Reine Angew. Math.* 391 (1988), 1-54.
- [TV] P. Tukia, J. Väisälä, *Quasisymmetric embeddings of metric spaces*. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 5 (1980), 97-114.
- [Tys98] J. Tyson, *Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 23(1998), 525-548.
- [TW06] J. Tyson, J. Wu, *Quasiconformal dimensions of self-similar fractals*. *Rev. Mat. Iberoamericana* 22 (2006), 205-258.
- [Ur03] M. Urbański, *Measures and dimensions in conformal dynamics*, *Bull. of the Amer. Math. Soc.* Volume 40, Number 3, Pages 281-321, 2003.
- [Väis84] J. Väisälä, *Quasi-Möbius maps*, *J. Analyse Math.* 44(1984/85), 218-234.
- [Va08] D. Vavricheck, *Strong accessibility for hyperbolic groups*, *Algebraic & Geometric Topology*, 8 (2008), 1459-1479.
- [VK88] A. Vol'berg, S. Konyagin, *On measures with the doubling condition*. *Math. USSR-Izv.* 30, 1988, 629-638.
- [Wu98] J. Wu, *Hausdorff dimension and doubling measures on metric spaces*. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), 1453-1459.
- [Yin99] Yin, Yong Cheng, *Julia sets of semi-hyperbolic rational maps*, *Chinese J. Contemp. Math.* 20 (1999), no. 4, 469-476.





RÉSUMÉ. L'objet principal de cette thèse est l'étude de la dimension conforme Ahlfors régulière ( $\dim_{AR} X$ ) d'un espace métrique  $X$ . C'est un invariant numérique par quasisymétrie, introduit par P. Pansu, permettant la classification à quasi-isométrie près des espaces homogènes de courbure négative. Elle joue actuellement un rôle important en théorie géométrique des groupes et en dynamique conforme.

A partir d'une suite de recouvrements d'un espace métrique compact  $(X, d)$ , on construit des distances de dimension contrôlée appartenant à la jauge conforme (Ahlfors régulière). On peut ainsi caractériser toutes les métriques de la jauge à homéomorphismes bi-Lipschitz près.

On montre comment calculer  $\dim_{AR} X$  à partir de modules combinatoires en considérant un exposant critique  $Q_N$ . Comme conséquence de l'égalité  $\dim_{AR} X = Q_N$ , on obtient un critère général de dimension 1. Les conditions sont données en termes de points de coupure locale de  $X$ .

On donne par ailleurs des applications de ces résultats aux bords des groupes hyperboliques et aux ensembles de Julia des fractions rationnelles semihyperboliques.

ABSTRACT. In this thesis we study the Ahlfors regular conformal dimension ( $\dim_{AR} X$ ) of a metric space  $X$ . This is a quasisymmetric numerical invariant, introduced by P. Pansu, which was used to classify negatively curved homogeneous spaces up to quasi-isometries. It plays nowadays an important role in geometric group theory and in conformal dynamics.

Using a sequence of finite coverings of a compact metric space  $(X, d)$ , we construct distances in the (Ahlfors regular) conformal gauge of controlled dimension. We obtain in this way a combinatorial characterization (up to bi-Lipschitz homeomorphisms) of all the metrics of the gauge.

We show how to compute  $\dim_{AR} X$  using the critical exponent  $Q_N$  associated to the combinatorial modulus. As a consequence of the equality  $\dim_{AR} X = Q_N$ , we obtain a general criterion ensuring dimension 1. The conditions are stated in terms of local cut points of  $X$ .

Finally, we give applications of these results to the boundaries of Gromov hyperbolic groups and to the Julia sets of semi-hyperbolic rational maps.